LA SORPRENDENTE SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sorprendente sucesión de Fibonacci debe su nombre a Leonardo de Pisa (1.170-1.240), más conocido por Fibonacci (hijo de Bonaccio). A pesar de ser un matemático brillante con una importante obra en su haber, es conocido principalmente por una cuestión aparentemente trivial, una sucesión de números enteros en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores.

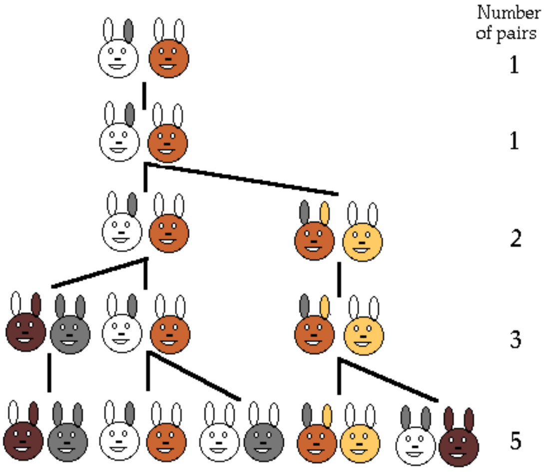
1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 - 144- ....

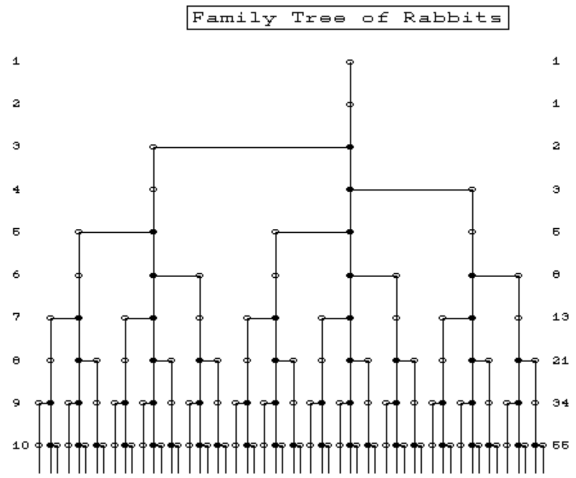
Fibonacci tuvo un preceptor árabe y viajó por el Norte de África. Gracias a ello aprendió el sistema de numeración árabe, que a su vez Al-Khwarizmi aprendió de los hindúes, y lo introdujo en Europa con su obra “Liber abaci”.

Desterró para siempre el viejo y complicado sistema de numeración basado en las letras del alfabeto. Sólo sobrevive el arcaico sistema latino en las inscripciones solemnes.

De todas formas, Fibonacci ha pasado a la historia por su famosa sucesión, la cual representa un buen número de situaciones prácticas, pero la más anecdótica es la relacionada con una teórica cría de conejos en una granja.

Supongamos una pareja de conejos, los cuales pueden tener descendencia una vez al mes a partir del segundo mes de vida. Suponemos asimismo que los conejos no mueren y que cada hembra produce una nueva pareja (conejo, coneja) cada mes. La pregunta es, ¿cuántas parejas de conejos existen en la granja al cabo de n meses?.





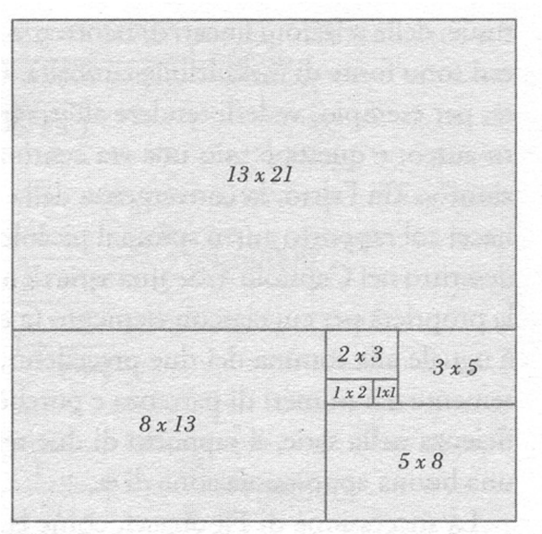
Como puede fácilmente comprobarse, el número de parejas coincide con los términos de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es uno de los temas más sorprendentes de la Matemática, existen multitud de aplicaciones en los que aparece esa sucesión, existiendo una amplísima bibliografía dedicada exclusivamente al estudio de sus propiedades y aplicaciones. A título de ejemplo citaremos.

Propiedades de la sucesión de Fibonacci

1ª) Usando los términos de la sucesión de Fibonacci podemos dibujar rectángulos de dimensiones iguales a los términos de la sucesión, expresadas, por ejemplo, en centímetros.

Tal como se observa en la figura adjunta, los rectángulos con estas dimensiones encajan perfectamente entre sí, como piezas de un puzzle formando cuadrados, de tamaños progresivamente mayores.



La explicación es sencilla. Sumando los productos de los términos consecutivos de la sucesión en la forma.

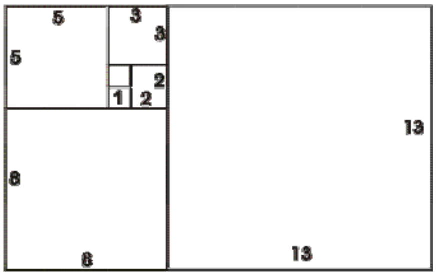
$(1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) = 3^2$, obtenemos el cuadrado del último término.

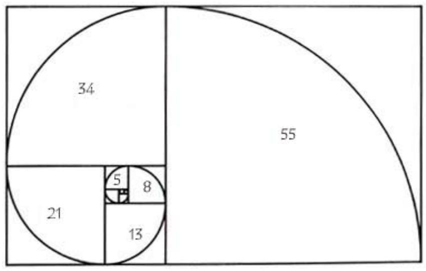
$(1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 5) + (5 \cdot 8) + (8 \cdot 13) + (13 \cdot 21) = 21^2$

$(1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 5) + (5 \cdot 8) + (8 \cdot 13) + (13 \cdot 21) + (21 \cdot 34) + (34 \cdot 55) + (55 \cdot 89) + (89 \cdot 144) = 144^2$

\- - - - - - etc

2ª) Uniendo rectángulos de dimensiones igual a los términos correlativos de la sucesión de Fibonacci, formamos la llamada espiral de Fibonacci.





3ª) La suma de diez elementos consecutivos cualesquiera de la sucesión de Fibonacci es igual a 11 veces, el 7º elemento de ese grupo.¡OJO!. No hay que comenzar necesariamente por el primer término de la sucesión.

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – **13** – 21 – 34 – 55 – 89 – 144 - 233 ....

$1+1+2+3+5+8+13+21+34+55 = 143 = 11 \cdot \mathbf{13}$

4ª) El cuadrado de un término de la sucesión de Fibonacci es igual al producto de los términos que quedan a su derecha e izquierda respectivamente, aumentado o disminuido en una unidad. Esta diferencia va haciéndose alternativamente positiva y negativa.

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (f_n)^2 \pm 1$$

$$2 \cdot 5 = 3^2 + 1$$
$$8 \cdot 3 = 5^2 - 1$$

5ª) La suma de los cuadrados de dos números de Fibonacci consecutivos f_n y f_{n+1} es igual al término de Fibonacci de orden $f_{2\cdot n+1}$.

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2\cdot n+1}$$

$$2^2 + 3^2 = 13$$

$f_3 = 2$
$f_4 = 3$
$f_{2\cdot 3+1} = f_7 = 13$
(véase la sucesión de Fibonacci)

6º) Cualesquiera cuatro términos de Fibonacci consecutivos A, B, C y D, verifican que:

$$C^2 - B^2 = A \cdot D$$
$$89^2 - 55^2 = 144 \cdot 34$$

Es decir, la diferencia entre los cuadrados de los términos medios es igual al producto de los términos de los extremos.

7ª) A excepción del 3, todo número de Fibonacci que sea primo tiene también subíndice primo.

$89 = f_{11}$ el 89 es primo y el 11 también

Sin embargo al revés no es cierto, los términos de Fibonacci de orden primo NO tienen que ser necesariamente primos. Por ejemplo:

$$f_{19} = 4.181$$

19 es primo, pero 4.181 es compuesto; $4.181 = 37 \cdot 113$

8ª) No se sabe si en la sucesión de Fibonacci existe un número infinito de términos que sean primos.

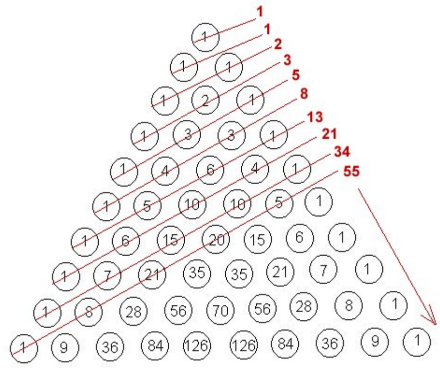
El mayor número de Fibonacci primo conocido es f_{531} que tiene 119 cifras. Se ignora si existe alguno mayor.

9ª) Dos números de Fibonacci consecutivos cualesquiera son siempre primos entre sí.

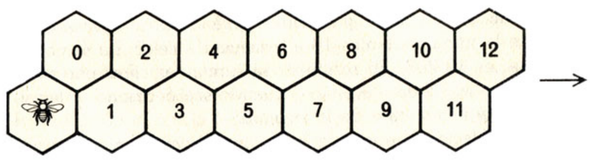
10ª) Entre los términos de Fibonacci existe un solo cuadrado perfecto (dejando aparte el caso trivial del 1), el f_{12} = 144. Curiosamente su valor es el cuadrado de su subíndice. Está demostrado que no existe ningún otro cuadrado en la sucesión de Fibonacci.

11ª) De igual forma, sólo existe un cubo (dejando aparte el caso trivial del 1) entre los términos de Fibonacci, el f_6 = 8

12ª) En el triángulo de Tartaglia (Pascal) sumando los términos de las diagonales secundarias, obtenemos los términos de la sucesión de Fibonacci, tal como se observa en la figura.

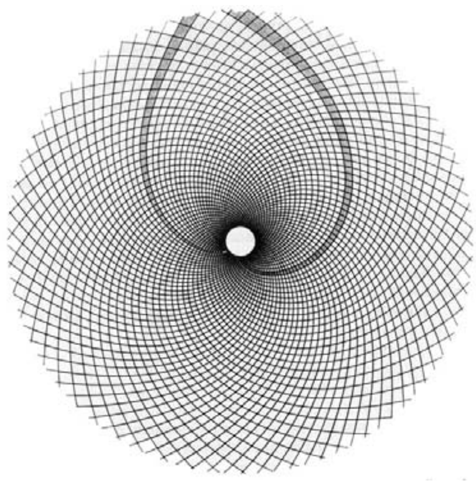


13ª) En un panal de abejas numerado como en el de la figura, que se prolonga indefinidamente. La abeja parte de la posición inicial indicada. El número de posibles trayectos desde la posición inicial hasta la celdilla **n,** son términos de la sucesión de Fibonacci.



Partiendo de la posición inicial de la abeja, (señalada en el dibujo adjunto). Hay ***1*** ruta posible hasta la casilla 0, ***2*** rutas hasta la casilla número 1, ***3*** rutas hasta la casilla número 2, ***5*** posibles itinerarios hasta la casilla número 3, etc.

14ª) El número de antepasados de los zánganos son términos de Fibonacci (nótese que los zánganos son producidos a partir de los huevos infertilizados de la abeja reina, es decir, tienen una madre pero no tienen padre). Cada zángano tiene ***1*** madre, ***2*** abuelos (los padres de la madre), ***3*** bisabuelos, ***5*** tatarabuelos, etc.



15ª) En los girasoles, las semillas se distribuyen en forma de espirales logarítmicas, unas en sentido horario y otras en sentido antihorario, si contamos el número de espirales que hay en un sentido y las que hay en el otro aparecen términos de Fibonacci consecutivos. En el ejemplo de la figura se cuentan 55 espirales en sentido antihorario y 89 espirales en sentido horario.

Igual sucede en las piñas de los pinos.

16ª) Pero la relación más sorprendente de todas, es su correlación con el número de oro, la llamada razón áurea φ.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180....$$

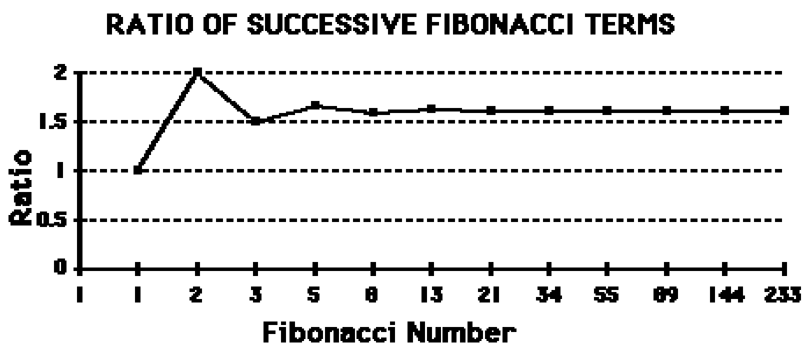
Si tomamos los términos de la sucesión de Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Y dividimos cada término por el anterior vamos obteniendo los siguientes valores.

$$\frac{1}{1}=1 \quad \frac{2}{1}=2 \quad \frac{3}{2}=1{,}5 \quad \frac{5}{3}=1{,}66.. \quad \frac{8}{5}=1{,}6 \quad \frac{13}{8}=1{,}625 \quad \frac{21}{13}=1{,}615.. \quad \frac{34}{21}=1{,}619... \quad \frac{55}{34}=1{,}617... \quad \frac{89}{55}=1{,}618...$$

Representando estos cocientes en forma gráfica.



Los cocientes sucesivos convergen hacia el valor 1,618033989..... En otras palabras.

$$\lim \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

El término general de la sucesión de Fibonacci es.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \qquad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^n - \left(\frac{1}{\varphi} \right)^n \right]$$

De nuevo, y sorprendentemente el número de oro aparece relacionado con los fenómenos naturales que hemos descrito. Y es que el número de oro posee unas sorprendentes propiedades matemáticas.

Si comparamos.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180....$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0{,}6180....$$

Observamos que poseen la misma parte decimal. En otras palabras.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

El único número que cumple esa propiedad es nuestro viejo conocido, el número de oro.

Esa relación implica la curiosa sucesión de igualdades.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = \ldots\ldots$$