Sucesiones de números reales

Llamaremos *sucesión* de números reales a una función $a : I\!\!N \rightarrow I\!\!R$. Notaremos $a(n) = a_n$. Para referirnos a la sucesión cuyo término n-ésimo es a_n usaremos la notación $\{a_n\}$.

Ejemplos:

1. $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$$
   $a(1) = 1 \quad a(2) = \frac{1}{2} \quad a(3) = \frac{1}{3} \quad a(n) = \frac{1}{n}$

2. $$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$$
   $a(1) = \frac{1}{2} \quad a(2) = \frac{2}{3} \quad a(3) = \frac{3}{4} \quad a(n) = \frac{n}{n+1}$;

$a(n)$ se llama *término general* de la sucesión.
Dado el término general de una sucesión podemos hallar cualquier término de la sucesión.

Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ es

- **convergente** si $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} a_n = L$
- **divergente** si $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} a_n = +\infty$ o $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} a_n = -\infty$
- **oscilante** si no es convergente ni divergente

Ejemplos:

1. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

   $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\rightarrow\infty} \dfrac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$, $\{a_n\}$ converge.

2. $\{a_n\} = \{cos(n\pi)\}$

   -1,1,-1,1,-1,...

   $\{a_n\} = \begin{cases} -1 & \text{si n es impar} \\ 1 & \text{si n es par} \end{cases}$, $\{a_n\}$ oscila.

3. $\{a_n\} = \{2^n\}$

   $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} 2^n = +\infty$, $\{a_n\}$ diverge.

Las sucesiones se definen a menudo *recursivamente* proporcinando el(los) valor(es) del término inicial y una regla llamada *fórmula de recursión* para calcular cualquier término posterior a partir de los términos que lo preceden.

Ejemplos:

1. $a_1 = -2$, $a_{n+1} = n\, a_n/(n+1)$

2. $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_n = a_{n-1}/a_{n-2}$

Propiedades:

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, L es único.

2. Si $\{a_n\}$ es convergente entonces está acotada, es decir, $\exists\, M > 0 : |a_n| \le M \quad \forall n \in I\!N$.

3. Si $b_n \le a_n \le c_n$ $\forall n \ge k$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. (Propiedad del sandwich)

4. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $L > 0$ entonces $a_n > 0$ para infinitos n.

   Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$:

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = a\, b$

7. Si $b \ne 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

Sucesiones acotadas:

- Una sucesión $\{a_n\}$ se dice *acotada superiormente* si $\exists\, k \in I\!R : a_n \le k \quad \forall n$. El número k es una *cota superior* de $\{a_n\}$.

- Una sucesión $\{a_n\}$ se dice *acotada inferiormente* si $\exists\, k \in I\!R : a_n \ge k \quad \forall n$. El número k es una *cota inferior* de $\{a_n\}$.

- Una sucesión $\{a_n\}$ se dice *acotada* si $\exists k > 0 : |a_n| \le k \quad \forall n$.

Ejemplos:

1. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

   Acotada, pues $|\frac{1}{n}| \le 1, \quad \forall n$.

2. $\{a_n\} = \{2^n\}$

   Acotada inferiormente, pero no superiormente, $2 \le 2^n, \quad \forall n$.

3. $\{a_n\} = \{-2^n\}$

   Acotada superiormente, pero no inferiormente, $-2^n \le -2, \quad \forall n$.

Sucesiones monótonas:

- Una sucesión $\{a_n\}$ se dice *monótona creciente* si $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n.$
- Una sucesión $\{a_n\}$ se dice *monótona decreciente* si $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n.$
- Una sucesión $\{a_n\}$ se dice *monótona* si es monótona creciente o monótona decreciente.

Observemos que una sucesión monótona creciente (decreciente) está acotada inferiormente (superiormente).

Teorema: Una sucesión monótona y acotada es convergente.

Una sucesión a_n se dice una *sucesión de Cauchy* si $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, M(\epsilon)$ tal que $\forall\, m, n \geq M(\epsilon)$, $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Teorema: Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Criterio de convergencia de Cauchy: Una sucesión es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Ejemplos importantes:

1. Sea $\{a_n\} = \{r^n\}$, $r > 0$
$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \end{cases}$$
2. Para cualquier $p \in I\!R^+$, la sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{p}\}$ converge a 1, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.
3. La sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$ converge a 1, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Progresiones:

Progresión aritmética

Llamamos *progresión aritmética* a aquella sucesión en la que cada término se obtiene sumando una misma cantidad d, llamada diferencia, al término anterior. Así, si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética se verfica que $a_n = a_{n-1} + d$.

Ejemplos:

1. Determinar si la sucesión 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5 ... una progresión aritmética. Si lo es, ¿cuál es la diferencia?

   $5 - 7 = -2; 3 - 5 = -2; 1 - 3 = -2; -1 - 1 = -2; ...$

   Por lo tanto es una progresión aritmética de diferencia $d = -2$.

2. ¿Es $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{9}{2}, ...$ una progresión aritmética?

$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \qquad 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

$3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$

Luego no es una progresión aritmética.

Término general de una progresión aritmética: La fórmula del término general de una progresión aritmética $\{a_n\}$ se encuentra observando que:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$

Observemos que en todos los casos el término correspondiente es la suma de dos cantidades:
- La primera es siempre a_1.
- La segunda es el producto $(n-1)d$.
Por lo tanto

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

.

Observaciones:

- Si la diferencia de una progresión aritmética es positiva, la progresión es estrictamente creciente.
- Si la diferencia de una progresión aritmética es cero, la progresión es constante, es decir, tiene todos sus términos iguales.
- Si la diferencia de una progresión aritmética es negativa, la progresión es estrictamente decreciente.

Ejemplo:
Dada la sucesión $1, 3, 5, 7, 9, ...$, ¿cuál es su término general?
Es una progresión aritmética de diferencia $d = 2$ y primer término $a_1 = 1$. El término general es:
$a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$.

Términos equidistantes de una progresión aritmética: Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de diferencia d y $r + s = u + v$, entonces $a_r + a_s = a_u + a_v$.

$$\begin{array}{rcl} a_r = a_1 + (r-1)d & \qquad & a_u = a_1 + (u-1)d \\ \underline{a_s = a_1 + (s-1)d} & \qquad & \underline{a_v = a_1 + (v-1)d} \\ a_r + a_s = 2a_1 + (r+s-2)d & \qquad & a_u + a_v = 2a_1 + (u+v-2)d \end{array}$$

Estos dos resultados son iguales por ser $r + s = u + v$.

Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética

Denotaremos por S_n a la suma $a_1 + a_2 + ... + a_n$. Entonces tenemos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Invirtiendo el orden,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

y sumando,

$$2Sn = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Ahora bien, por la propiedad de los términos equidistantes sabemos que:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_n + a_1.$

Por lo tanto, $2S_n = n(a_1 + a_n)$; despejando tenemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

Esta fórmula no sólo sirve para sumar los primeros términos de una progresión aritmética sino para sumar cualesquiera n términos consecutivos.

Cuando Carl Frederich Gauss (matemático alemán del siglo XIX) tenía 10 años, su maestro propuso a los alumnos calcular la suma de los 100 primeros números, con el objeto de que practicaran la suma de números enteros. La sorpresa del maestro fue que ni bien terminó de enunciar el ejercicio, Gauss le dio la solución: 5050.

Lo que Gauss observó fue que la suma 1 + 100 era igual a 2 + 99, igual a 3 + 98, ... etc. es decir, sólo tuvo que darse cuenta de que contaba con 50 parejas de números, cada una de las cuales sumaba 101. Así, se limitó a multiplicar: 50 101 = 5050.

Progresión geométrica

Llamamos *progresión geométrica* a aquella sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando por una misma cantidad r, llamada razón, al término anterior. Así, si $\{a_n\}$ es una progresión geométrica se verfica que $a_n = a_{n-1} \cdot r$.

Ejemplos:

1. ¿Es 5, 15, 45, 135, 405, ... una progresión geométrica?

   $\frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = \frac{405}{135} = 3$

   Luego es una progresión geométrica de razón 3.

2. Determinar si la sucesión $25, -5, 1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, ...$ es una progresión geométrica.

   $\frac{-5}{25} = \frac{1}{-5} = \frac{-1/5}{1} = \frac{1/25}{-1/5} = -\frac{1}{5}$

   Pero $\frac{1/125}{1/25} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$, por lo tanto no es una progresión geométrica.

Término general de una progresión geométrica: La fórmula del término general de una progresión geométrica $\{a_n\}$ se encuentra observando que:

$a_2 = a_1\, r$

$a_3 = a_2\, r = (a_1\, r)\, r = a_1\, r^2$

$a_4 = a_3\, r = (a_1\, r^2)\, r = a_1\, r^3$

$a_5 = a_4\, r = (a_1\, r^3)\, r = a_1\, r^4$

Observemos que en todos los casos el término correspondiente es el producto de dos cantidades:
- La primera es siempre a_1.
- La segunda es una potencia de base r y exponente un cierto número, que se obtiene restando una unidad al subíndice.

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}.$$

Observaciones:

- Si la razón de una progresión geométrica es mayor que uno, la progresión es estrictamente creciente.
- Si la razón de una progresión geométrica está comprendida entre cero y uno, la progresión es estrictamente decreciente.
- Si la razón de una progresión geométrica es uno, la progresión es constante, es decir, tiene todos los términos iguales.
- Si la razón de una progresión geométrica es menor que cero, la progresión es alterna, es decir, sus términos son alternativamente positivos y negativos.

Ejemplo:
Calcular el término general de la sucesión $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, ..$
Es una progresión geométrica de razón $r = 3$ y primer término es $a_1 = \frac{1}{3}$. El término general es:
$a_n = \frac{1}{3}\, 3^{n-1} = 3^{n-2}$.

Términos equidistantes de una progresión geométrica: Si $\{a_n\}$ es una progresión geométrica de razón r y $t + s = u + v$, entonces $a_t\, a_s = a_u\, a_v$.

$$\begin{array}{c} a_t = a_1\, r^{t-1} \\ \underline{a_s = a_1\, r^{s-1}} \\ a_t\, a_s = a_1^2\, r^{t+s-2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a_u = a_1\, r^{u-1} \\ \underline{a_v = a_1\, r^{v-1}} \\ a_u\, a_v = a_1^2\, r^{u+v-2} \end{array}$$

Como $t + s = u + v$, los dos resultados son iguales.

Producto de términos consecutivos de una progresión geométrica

Denotaremos por P_n al producto $a_1\, a_2 \ldots a_n$. Entonces tenemos

$$P_n = a_1\, a_2 \ldots a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n.$$

Invirtiendo el orden,

$$P_n = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1.$$

y multiplicando

$$P_n^2 = (a_1\, a_n)(a_2\, a_{n-1})...(a_{n-1}\, a_2)(a_n\, a_1)$$

Ahora bien, por la propiedad de los términos equidistantes sabemos que:

$$a_1\, a_n = a_2\, a_{n-1} = a_3\, a_{n-2} = ... = a_n\, a_1.$$

Por tanto, $P_n^2 = (a_1\, a_n)^n$, y despejando tenemos:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1\, a_n)^n}.$$

Para determinar el signo, ha de estudiarse cada caso concreto.

Esta fórmula no sólo sirve para multiplicar los primeros términos de una progresión geométrica, sino que también es válida para multiplicar cualesquiera n términos consecutivos.

Suma de términos consecutivos de una progresión geométrica

Denotaremos por S_n a la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Para obtener una fórmula que permita hacer este cálculo de un modo rápido, se multiplican ambos miembros de la igualdad por la razón:

$$S_n\, r = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n)\, r =$$

$$= a_1\, r + a_2\, r + ... + a_{n-1}\, r + a_n\, r,$$

y teniendo en cuenta que al multiplicar un término por la razón se obtiene el término siguiente,

$$S_n\, r = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n\, r.$$

Restando ahora a esta igualdad la primera:

$$S_n\, r - S_n = -a_1 + a_n\, r.$$

$$S_n\,(r-1) = a_n\, r - a_1.$$

Despejando S_n

$$S_n = \frac{a_n\, r - a_1}{(r-1)}.$$

Está fórmula que da la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica tiene otra versión igualmente útil si se expresa el término general a_n como $a_1\, r^{n-1}$:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Entre las progresiones aritméticas y las geométricas se pueden apreciar notables diferencias. Estas últimas “crecen” mucho más rápido (si la razón es mayor que la unidad) que las progresiones aritméticas; o “decrecen” de manera tan vertiginosa que incluso es posible sumar una cantidad infinita de números y obtener un resultado tan inesperado como sorprendentemente pequeño, cuando la razón, en valor absoluto, es menor que la unidad, como ya se ha visto.

Ejemplos:

1. Supongamos que dos personas acuerdan que uno dará al otro dos pesos el primer día del mes; cuatro pesos al día siguiente; seis el tercero, y así, sumando dos pesos diarios hasta completar el mes. Simultáneamente, el segundo dará al primero un peso el primer día; dos pesos, el segundo; cuatro, el tercero, y así sucesivamente, duplicando la cantidad del día anterior, hasta cumplir el plazo asignado de treinta días. ¿Quién obtendrá mayores beneficios?

   El primero, la última jornada desembolsa 60 pesos pues
   $a_{30} = 2 + (30 - 1)2 = 60.$

   En todo el mes tiene un gasto de 930 pesos ya que
   $S_{30} = \frac{2+60}{2}30 = 930.$

   Por su parte, el otro amigo aporta $1 + 2 + 4 + ... + 2^{29}$ pesos. Usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, se tiene que la cantidad es:

$$S_{30} = \frac{2^{30} - 1}{2 - 1} \text{ es decir 1073741823 pesos!!!!!}$$

2. Se toma una hoja de papel de 30cm de largo por 20cm de ancho y 0.05mm de espesor. Si se dobla el papel por su mitad; se vuelve a doblar otra vez por la mitad, y se continúa este proceso hasta repetirlo 50 veces, ¿qué grosor tendría el trozo de papel resultante?

   Es claro que en la quincuagésima operación de plegado, se tendrá un grosor de

   2^{50} veces el espesor inicial, es decir, $2^{50}/20$ mm; o $2^{50}/200$ cm; o $2^{50}/20000$ m; o mejor aun, $2^{50}/20000000$ km.

   Haciendo las operaciones resulta que el grosor del tan citado papel es de aproximadamente 56 294 995 km!!

   Compárese este dato con la distancia media de la Tierra a la Luna, que es de 385 000 km.