SUCESIONES Y SERIES

José Darío Sánchez Hernández
danojuanos@hotmail.com

§1. SUCESIONES DE NUMEROS REALES.

1.1. Introducción.

Los *números naturales* son algo que actualmente está en el medio ambiente, quizás por esto llegó el matemático alemán Leopoldo Kronecker a decir: “El buen Dios dió al hombre los números naturales; el resto ha sido obra suya " .

Se consideran los números naturales como la estructura básica de la Matemática y siguiendo al matemático italiano Giuseppe Peano, los únicos términos técnicos que intervienen son los de número natural, primer natural (cero para nosotros y uno para otros, según los gustos) y “ el siguiente de ", o, “ el sucesor de ", con los siguientes axiomas:

$\mathbf{N_1}$. Cero es un número natural

$\mathbf{N_2}$. El siguiente de todo número natural también es número natural

$\mathbf{N_3}$. Si S es una colección de números naturales tal que cumple:

(i) 0 esta en S

(ii) Cada vez que un natural está en S, también el siguiente de él está en S.

Entonces S es el conjunto de todos los naturales.

$\mathbf{N_4}$. Si los siguientes de dos números naturales son iguales, entonces los números son iguales.

$\mathbf{N_5}$.Cero nunca es sucesor de un natural.

Sucesor de un conjunto significa, a otro conjunto con un elemento más; una manera de formar a partir de un conjunto dado A otro con un elemento más, es agregar el mismo A como elemento, a esté le llamaremos “el sucesor de A " y se le nota A^+.

$$A^+ = A \cup \{A\}.$$

Así

$$0^+ = 0 \cup \{0\} = \phi \cup \{\phi\} = 1$$
$$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} = 2$$
$$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} = 3$$
$$3^+ = 3 \cup \{3\} = \{0,1,2\} \cup \{3\} = \{0,1,2,3\} = 4$$
$$\vdots$$

Notaremos con $\mathbb{N}$ al conjunto de todos los números naturales.

1.2. Definición de sucesión.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de números reales y $f : \mathbb{N} \to A$ una función, es decir, $(\forall n \in \mathbb{N})(existe\, f(n) \wedge f(n) \in A)$. Al conjunto $\{f(n)\} \subseteq A$ se le llama una *sucesión* en A.

De la teoría de conjuntos se sabe que cuando $f(n) \in A$ significa que "$existe\, \lambda \in A\ tal\ que\, f(n) = \lambda$" , en este caso se denota $\lambda = a_n$. En esta forma al conjunto $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es al que usualmente se le llama *una sucesión* y a $\boldsymbol{a_n}$ se le conoce como el n-ésimo término de la sucesión.

Ejemplo. Así los conjuntos $\{1, 4, 27, 125, \cdots\}$ y $\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \cdots\}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$, representados por

$$\{n^n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 27, 125, \cdots\} \quad \text{y} \quad \{\tfrac{n+1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty} = \{2, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{5}{16}, \cdots\}.$$

Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{N} \to$ A es una sucesión entonces $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es llamada *una sucesión* de números reales o simplemente *una sucesión* real .

1.3 . Sucesiones Monótonas.

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión real, se dice que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión **creciente** cuando la siguiente proposición es verdadera

$$n \le m \Rightarrow a_n \le a_m$$

Ejemplo. Los conjuntos $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones crecientes.

Análogamente sea $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión real , se dice que $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es **decreciente** si

$$n \le m \Rightarrow b_n \ge b_m$$

Ejemplo. Los conjuntos $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{n+1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones decrecientes.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es *una sucesión monótona* si es creciente o decreciente.

Una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice *acotada superiormente* si existe una constante M tal que $a_n \le M,\ para\ todo\, n \in \mathbb{N}$.

Se dice que la sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es *acotada inferiormente* si existe una constante K tal que $b_n \ge K,\ para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es *acotada*, si es acotada superior e inferiormente, es decir que existe una constante $M_0 \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.4. Límite de una sucesión.

Si los términos de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se acercan a un número L, se dice que la sucesión tiende al límite L (o que *converge* a L) y se nota:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ \ (\text{ó}, \ a_n \to L \ \ cuando \ \ n \to \infty)$$

Más precisamente la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a L, si dado un número cualquiera $\epsilon > 0$, es posible la determinación de un número natural N tal que si $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$

Esto es, a partir de un N-ésimo término todos los elementos de la sucesión están en un entorno de L con radio ϵ.

$$\left|\overline{\underline{a_1. \ \ (a_N. \ \ a_n.\ldots \ \ \ L.\ldots \ \ a_{N+1}. \ \ ) \ \ a_3.a_2.\cdots a_{N-1}}}\right|$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad\qquad\qquad\qquad & \uparrow \\ L-\epsilon & & L+\epsilon \end{array}$$

Una sucesión que tiene un límite se le llama *sucesión convergente*, en caso contrario la sucesión de dice *divergente*

Formalmente tenemos la siguiente definición:

Definición. : *Una sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *se dice convergente hacia* L *si*
"dado $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $|a_n - L| < \epsilon$ *".*

Ejemplos.

1. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ naturalmente es convergente y su límite es 0. Para mostrar esto demos $\epsilon > 0$ y tratemos de hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{n}| < \epsilon$.
Ahora $\frac{1}{N} < \epsilon \Leftrightarrow N > \frac{1}{\epsilon}$. Por lo tanto como los números naturales no son acotados en $\mathbb{R}$ podemos tomar un número natural N tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$, así la proposición

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N > 0 \quad tal\, que \quad si \quad n \geq N \ \Rightarrow \ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon)$$

es verdadera, luego $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Para la sucesión $\{1\}_{n=0}^{\infty}$, dado $\epsilon > 0$, existe $N = 1$ tal que si $n \geq N = 1 \Rightarrow |1 - 1| = 0 < \epsilon$. Esto significa que $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

3. Consideremos la sucesión $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, probemos que esta sucesión no tiene límite. Supongamos por contradicción que $\lim_{n\to\infty} = L$ y que $L \in \mathbb{R}$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|n - 1| < \epsilon$. En particular si $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$|n-L|<1\,(n\geq N) \Leftrightarrow -1<n-L<1\ (n\geq N) \Leftrightarrow L-1<n<L+1\ (n\geq N)$.
Esta última afirmación asegura que para todo $n\geq N,\ n<L+1$ de donde los números naturales resultarían acotados lo cual es imposible$\rightarrowtail\!\leftarrow$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} n$ no existe.

4. Consideremos la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}=\{1,-1,1,-1,\cdots\}$ y supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=L \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces $|(-1)-L|<\epsilon)$.
En particular para $\epsilon=\frac{1}{2}, \exists N_1\in\mathbb{N}$ tal que $|(-1)^n-L|<\frac{1}{2}\ (n\geq N_1)$.

$$(n\geq N_1)\Rightarrow\begin{cases}|1-L|<\frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par}\\ |-1-L|<\frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

pero esto es contradictorio$\rightarrowtail\!\leftarrow$ pues, en ese caso se tendría

$$2=|2|=|1+1|=|1+L-L+1|\leq|1+L|+|1-L|<\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1$$

así $2<1$ lo cual es contradictorio$\rightarrowtail\!\leftarrow$, luego $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe.

5. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{2n}{n+4n^{1/2}}\right\}$

Por teoría de límites se considera:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+4x^{1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+4\frac{1}{2}x^{-1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{1/2}}{x^{1/2}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}=2.$$

Esto nos sugiere que la sucesión $\left\{\frac{2n}{n+4n^{1/2}}\right\}_{n=1}^{\infty}\to 2$

Para esto dado $\epsilon>0$,$\exists N>0,$ tal que si $n\geq N \Rightarrow \left|\frac{2n}{n+4n^{1/2}}-2\right|<\epsilon$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{2n-2n-8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}\right|<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad \frac{8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}<\epsilon$$

pero

$$\frac{8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}<\frac{8n^{1/2}}{n}\ \text{ y si }\ \frac{8n^{1/2}}{n}<\epsilon\quad(n\geq N)\Rightarrow\frac{8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}<\epsilon$$

pues

$$n<n+4n^{1/2}\Leftrightarrow\frac{1}{n+4n^{1/2}}<\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}<\frac{8n^{1/2}}{n}\ \text{ y }\ \frac{8}{n^{1/2}}<\epsilon\quad(n\geq N).$$

Esto nos lleva a elegir N de tal manera que

$$\frac{8}{N^{1/2}}<\epsilon \text{ , esto es escoger } N>\frac{64}{\epsilon^2}$$

en esta forma $\frac{8}{n^{1/2}}<\epsilon$ para $n\geq N$ con $N>\frac{64}{\epsilon^2}$ (pues $\frac{8}{n^{1/2}}<\frac{8}{N^{1/2}}$ si $n\geq N$)
Con esto hemos probado que dado $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $N>\frac{64}{\epsilon^2}$ así

$$\left|\frac{2n}{n+4n^{1/2}}-2\right|=\left|\frac{-8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}\right|=\frac{8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}<\frac{8n^{1/2}}{n}<\frac{8}{n^{1/2}}<\frac{8}{N^{1/2}}<\epsilon$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+4n^{1/2}}=2.$$

$\square$

Teorema 1. *Si* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números no negativos y si* $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=L$, *entonces* $L\geq 0$.

***Demostración* :** Supongamos que por contradicción que $L<0$. Entonces para $\epsilon=-\frac{L}{2}$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$|s_n-L|<-\frac{L}{2}\ (n\geq N)\Rightarrow|s_N-L|<-\frac{L}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{L}{2}<L-s_N<-\frac{L}{2}\Rightarrow s_N-L<-\frac{L}{2}$$

o sea que $s_N<L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}$ luego $s_N<0$ así los términos de la sucesión son negativos lo cual es contradictorio→←. Luego $L\geq 0$.

□

1.5. Sucesiones convergentes

Definición. *Si una sucesión de números reales* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *tiene por límite a* L, *decimos que* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es convergente a* L. *Si* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *no tiene límite, decimos que* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es divergente.*

En los ejemplos anteriores tenemos que $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{1,1,1,\cdots\}$ son convergentes mientras que $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión divergente.

Teorema 2. *Si una sucesión de números reales* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a* L *entonces* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *no puede converger a otro límite* M *distinto de* L. *Esto es si* $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ *y* $\lim_{n\to\infty}a_n=M$ *entonces* $L=M$.

***Demostración* :** Dado $\epsilon>0$ existen N_1 y $N_2\in\mathbb{N}$ tales que

$$\begin{cases} n\geq N_1\Rightarrow|a_n-L<\frac{\epsilon}{2}\\ n\geq N_2\Rightarrow|a_n-M|<\frac{\epsilon}{2}\end{cases}$$

Tomando entonces $N=max\{N_1,N_2\}$ se tiene que

$$|L-M|=|L-a_n+a_n-M|\leq|L-a_n|+|a_n-M|<\epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, entonces se tiene lo deseado.

□

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión y $\eta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por k $\mapsto\eta$(k) una función estrictamente creciente, entonces $\{a_{\eta(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ es llamada *una subsucesión* de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ejemplo: $\{2n\}_{n=1}^{\infty}=\{2,4,6,\cdots\}$ es una subsucesión de $\{n\}_{n=0}^{\infty}=\{0,1,2,3,\cdots\}$
$\{1\}_{n=1}^{\infty}=\{1,1,1,\cdots\}$ es una subsucesión de $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}=\{-1,1,-1,1,\cdots\}$.

Teorema 3. *Si la sucesión de números reales* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es convergente a* L, *entonces cualquier subsucesión de* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es también convergente a* L.

***Demostración* :** Si $\lim_{n\to\infty}a_n=L\Leftrightarrow(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N}/\,n\geq N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon)$. Sea $\{a_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ una subsucesión de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y sea $i\in\mathbb{N}$ tal que $n(i)\geq N$. Ahora si $k\geq i$ entonces $n(k)\geq n(i)\geq N$, luego $|a_{n(k)}-L|<\epsilon$ (para todo $k\geq i$) esto es $\lim_{k\to\infty}a_{n(k)}=L$.

□

1.6. Sucesiones divergentes

Ya hemos visto que las sucesiones $\{n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ son ambas divergentes. Sin embargo estas dos sucesiones tienen un comportamiento diferente. Para la sucesión $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ se tiene la divergencia por no ser acotada, mientras que la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ es divergente por ser una sucesión **oscilante.**

Definición. *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales. Decimos que* a_n *tiende a infinito cuando* n *tiende a infinito si para cualquier número real* $M>0$ *existe un número natural* N *tal que* $a_n \geq M \quad (\forall n \geq N)$.

En este caso escribimos $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. En lugar de "$a_n\, se \;\; aproxima\, a \; infinito$" algunas veces decimos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge hacia infinito.
Es obvio que $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ es divergente a infinito , pues para $M>0$ dado, justamente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq M$, entonces ciertamente $n \geq M \quad (\forall n \geq N)$.
En forma análoga se tiene :

Definición. *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales. Decimos que* a_n *se aproxima a menos infinito cuando* n *tiende a infinito si para cada número real* $M>0$ *existe un número entero* N *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $a_n < -M$.

En este caso escribimos $a_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$ y decimos que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge a menos infinito.

Ejemplo. La sucesión $\{log(\frac{1}{n})\}_{n=0}^{\infty}$ diverge a menos infinito, pues dado $M>0$ debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $log(\frac{1}{n}) < -M \; (\forall n \geq N)$. Pero esto es equivalente a

$$log\, n > M \quad (\forall n \geq M) \Leftrightarrow n > e^M \quad (\forall n \geq N)$$

Así, si escogemos $N \geq e^M$ entonces se tendrá $n > e^M \; (\forall n \geq N)$ y por lo tanto $log\, n > M \; (\forall n \geq M)$.

La sucesión $\{1, -2, 3, -4, \cdots\}$ no se aproxima ni a $+\infty$ ni a $-\infty$. Sin embargo, esta sucesión tiene una subsucesión $\{1,3,5,\cdots\}$ la cual se aproxima a $+\infty$ y también una subsucesión $\{2, -4, -6, \cdots\}$ la cual se aproxima a $-\infty$.
Es fácil demostrar que si la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge a infinito, entonces cualquier subsucesión de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ también converge a infinito.
Algunas sucesiones divergentes que no divergen a $+\infty$ ni a $-\infty$, entonces ellas dan la idea de "$oscilación$".

Definición. *Si una sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *de números reales es divergente pero no diverge a* $+\infty$ *ni a* $-\infty$, *entonces decimos que* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es oscilante.*

Un ejemplo de una sucesión la cual es oscilante se presenta en $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$. Otro ejemplo es la sucesión $\{1,2,1,3,1,4,1,5,1,\cdots\}$ la cual tiene a $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ como subsucesión, luego es divergente, sin embargo, la sucesión no diverge a infinito; puesto que no existe $N \in \mathbb{N}$ para el cual la afirmación $a_n > 2 \ (\forall n \geq N)$ sea verdadera. Esta sucesión obviamente no diverge a $-\infty$. Por lo tanto la sucesión es $oscilante$.
La sucesión $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots\}$ converge a cero. Por lo tanto no es $oscilante$.

1.7. **Sucesiones acotadas.**

Recordemos que una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, vemos que el recorrido de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definición. *Decimos que una sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada por encima (ó superiormente) si el recorrido de* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotado superiormente. Análogamente decimos que la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada por debajo (ó inferiormente) si el recorrido de la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotado inferiormente. Será acotada si el recorrido de la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es respectivamente acotado superior e inferiormente. Así la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada si y solamente si existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|a_n| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Si una sucesión diverge a infinito entonces la sucesión no es acotada. Una sucesión que converge a infinito puede sin embargo, ser acotada inferiormente. Una sucesión que es oscilante, puede o no, ser acotada. La sucesión $\{1, -2, 3, -4, 5, \cdots\}$ es oscilante y no es acotada, ni superiormente, ni inferiormente. La sucesión $\{-1, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$ es oscilante y es acotada. La sucesión $\{1,2,1,3,1,4,1,5,\cdots\}$ es oscilante, es acotada inferiormente, pero no es acotada superiormente.

Teorema 4. *Si la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *de números reales es convergente, entonces la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada.*

***Demostración*:** Supóngase que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces dado $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < 1 \ (\forall n \geq N)$. Esto implica $|a_n| < |L| + 1 \ (\forall n \geq N)$ [pues, $|a_n| = |L + (a_n - L)| \leq |L| + |a_n - L|$] .
Si tomamos $M = máx\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$ entonces tenemos

$$|a_n| < M + |L| + 1 \ \ ((\forall n \in \mathbb{N})$$

lo cual demuestra que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada.

□

1.8. **Operaciones en sucesiones monótonas.**

Teorema 5. *Una sucesión creciente que está acotada superiormente, es convergente*

Demostración **:** Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente y acotada. Entonces el conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ es un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$, luego existe el extremo superior de A (ó el supremo) o sea

$$M = sup\,\{a_1, a_2, \cdots\} = sup\,A.$$

Probemos que $a_n \to M$ cuando $n \to \infty$. En efecto dado $\epsilon > 0$, entonces $M - \epsilon$ no es cota superior de A. Por lo tanto para algún $N \in \mathbb{N}$, $a_N > M - \epsilon$. Pero, puesto que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente, esto implica que $a_n > M - \epsilon$ $(\forall n \geq N)$. Por lo tanto como $M = sup\,A$ entonces $M \geq a_n\,(\forall n \geq N)$. De aquí concluimos que $|a_n - M| < \epsilon\,(\forall n \geq N)$.

Corolario: *La sucesión* $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=0}^{\infty}$ *es convergente.*

Demostración **:** Sea

$$a_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n = 1 + n\tfrac{1}{n} + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\tfrac{1}{n^2} + \cdots + \tfrac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,\tfrac{1}{n^n}$$

Para $k = 1, 2, 3, \cdots, n,$ el $(k+1)$-ésimo término es de la forma

$$\tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\,\tfrac{1}{n^k} = \tfrac{1}{1\cdot 2\cdots k}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})\cdots(1 - \tfrac{k-1}{n}) \qquad (1)$$

Si expandimos a_{n+1} obtenemos $n+2$ términos (uno más que a_n) y para $k = 1, 2, \cdots, n$, el término $(k+1) -$ ésimo es

$$\tfrac{1}{1\cdot 2\cdots k}(1 - \tfrac{1}{n+1})(1 - \tfrac{2}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{k-1}{n+1}) \qquad (2)$$

el cual es más grande que las cantidades en (1). Esto prueba que $a_n \leq a_{n+1}$, así $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente.

Pero también

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{1\cdot 2\cdots n} \\ &< 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \tfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 3 \end{aligned}$$

Luego $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, de donde $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ existe.

□

Teorema 6: *Una sucesión creciente de números reales, la cual no es acotada superiormente, es divergente a infinito.*

Demostración **:** Supuesto que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente pero no acotada por encima, dado $M > 0$ debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M\,(\forall n \geq N)$. Ahora puesto que M no es cota superior para $\{a_1, a_2, \cdots\}$ debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N > M$. Entonces para este N y como por hipótesis la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente se tiene $a_n > M$ $(\forall n \geq N)$. Esto prueba el teorema.

□

Teorema 7. *Una sucesión decreciente que es acotada por debajo es convergente. Una sucesión decreciente que no es acotado por debajo diverge a menos infinito.*

La demostración se deja como ejercicio.

.

1.9. Operaciones en sucesiones convergentes.

Puesto que las sucesiones de números reales son funciones a valor real la suma, multiplicación y división entre sucesiones se pueden definir así, si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones de números reales, entonces $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión $\{a_n \cdot b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y así sucesivamente. También, si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión $\{\lambda a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Teorema 8. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales, si* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, *entonces* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$. *En otras palabras el límite de la suma es la suma de los límites.*

Demostración **:** Dado $\epsilon > 0$, debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| < \epsilon \quad (\forall n \geq N) \tag{1}$$

Ahora

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M|$$

Por lo tanto (1) se tendrá solamente si

$$|a_n - L| + |b_n - M| < \epsilon \quad (\forall n \geq N) \tag{2}$$

Así debemos tener que tanto $|a_n - L|$ como $|b_n - M|$ deben ser menores que $\frac{\epsilon}{2}$ tomando n suficientemente grande.

Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ $(\forall n \geq N_1)$.

También como $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - M| < \frac{\epsilon}{2}$ $(\forall n \geq N_2)$.

Por lo tanto si seleccionamos $N = max\{N_1, N_2\}$, entonces los términos del primer miembro de (2) son cada uno menor que $\frac{\epsilon}{2}$ cuando $n \geq N$.

□

Teorema 9. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda L$.

Demostración**:** Si $\lambda = 0$, el teorema es obvio. Por lo tanto suponemos que $\lambda \neq 0$. Así dado $\epsilon > 0$ debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda a_n - \lambda L| < \epsilon$.

Ahora puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, existe N $\in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - L| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ $(\forall n \geq N)$.

Pero entonces

$$|\lambda||a_n - L| < \epsilon \ (\forall n \geq N)$$

Lo cual es equivalente a lo que queremos demostrar.
□

Teorema 10 : (a) *Si* $0 < x < 1$, *entonces* $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a* 0.
(b) *Si* $1 < x < \infty$, *entonces* $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a infinito.*

Demostración : (a) Si $0 < x < 1$ entonces $x^{n+1} = x^n \cdot x < x^n$. Por lo tanto $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente. Puesto que $x^n > 0$ para $n \in \mathbb{N}$, $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada por debajo, por lo tanto es convergente. Sea $L = \lim_{n\to\infty} x^n$. Tomando $\lambda = x$ tenemos por el resultado anterior $\lim_{n\to\infty} x \cdot x^n = x \cdot \lim_{n\to\infty} x^n = xL$. Esto es la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a xL, esto por que $\{x^{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, por lo tanto $xL = L$ así $L(x-1) = 0$ puesto que $x \neq 1 \Rightarrow L = 0$.
(b) Si $x > 1$ entonces $x^{n+1} = x \cdot x^n > x^n$ así que $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente. Mostremos que $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ no es acotada superiormente. Pues si $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ fuera acotada por arriba entonces $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ convergería digamos a L, así por un razonamiento análogo al de (a) se sigue que $xL = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Pero como $x \geq 1$ entonces obviamente $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a 0 lo cual es contradictorio. Luego $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ no es acotada superiormente y de hecho es divergente a infinito.

Teorema 11. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales,* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ *entonces* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$.

Demostración : (1) $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)b_n = (-1)\cdot \lim_{n\to\infty} b_n = -M$
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1)b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1)b_n = L - M$.

Corolario: *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales,* $a_n \leq b_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ *entonces* $L \leq M$.

Demostración : $M - L = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$. Pero $b_n - a_n \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ por lo tanto por un resultado anterior $M - L \geq 0$ (ver ejercicio 1 de esta sección.).

Con el fin de mostrar que el producto de límites, es el límite del producto, consideremos:

Lema : *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales la cual es convergente a* L, *entonces* $\{a_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a* L^2.

Demostración : Debemos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = L^2$. Esto es, dado $\epsilon > 0$ debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n^2 - L^2| < \epsilon \ (\forall n \geq \mathbb{N}) \Leftrightarrow |a_n - L||a_n + L| < \epsilon \ (\forall n \geq \mathbb{N}) \tag{1}$$

Ahora por ser $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión convergente entonces es acotada, así para algún $M > 0$, $|a_n| \leq M \ (\forall n \in \mathbb{N})$ así que

$$|a_n + L| \leq |a_n| + |L| \leq M + L \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| = \frac{\epsilon}{M+L} \quad (\forall n \geq \mathbb{N}) \tag{3}$$

Pero usando (2) y (3), tenemos

$$|a_n - L|\,|a_n + L| < \frac{\epsilon}{M+L} \cdot (M+L) = \epsilon \quad (\forall n \geq \mathbb{N})$$

Así, para este N, (1) es verdad y tenemos el resultado deseado.

□

Teorema 12. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales,* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = LM$.

Primera demostración. Usamos la siguiente identidad:

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Ahora, cuando $n \to \infty$

$$a_n + b_n \to L + M \quad \text{y} \quad (a_n + b_n)^2 \to (L+M)^2$$

también

$$a_n - b_n \to L - M \quad \text{y} \quad (a_n - b_n)^2 \to (L-M)^2$$

Así tenemos

$$(a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2 \to (L+M)^2 - (L-M)^2 = 4LM$$

finalmente por la identidad (1) tenemos

$$a_n b_n = \frac{1}{4}[\,(a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2] \to \frac{1}{4}(4LM) = LM$$

Segunda demostración **:** Dado $\epsilon > 0$, debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n b_n - LM| < \epsilon \qquad (\forall n \geq N)$$

El problema aquí es puramente algebráico. Usando la hipótesis de que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, tenemos

$$a_n b_n - LM = a_n b_n - L b_n + L b_n - LM = b_n(a_n - L) + L(b_n - M)$$
$$|\,a_n b_n - LM| \leq |b_n| \cdot |a_n - L| + |L| \cdot |b_n - M|.$$

Por lo tanto nos basta mostrar que

$$|b_n| \cdot |a_n - L| + |L| \cdot |b_n - M| < \epsilon \quad (\forall n \geq N) \tag{2}$$

Pero $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente luego es acotada así existe $Q > 0$ tal que $|b_n| \leq Q$ $(\forall n \geq N)$, así (2) se reduce a

$$\mathrm{Q} \cdot |a_n - L| + |L| \cdot |b_n - M| < \epsilon \qquad (\forall n \geq N)$$

Ahora como $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \to L$ para $\frac{\epsilon}{2Q} > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2Q} \qquad (\forall n \geq N_1)$$

en forma análoga como $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ para $\frac{\epsilon}{|L|2} > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_n - M| < \frac{\epsilon}{|L|2} \qquad (\forall n \geq N_2)$$

luego tomando $N = max\{N_1, N_2\}$ tenemos si $n \geq N$, entonces

$$Q|a_n - L| + |L| \cdot |b_n - M| < Q\frac{\epsilon}{2Q} + |L|\frac{\epsilon}{|L|2} = \epsilon.$$

□

Lema : *Si* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales y si* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ *donde* $M \neq 0$ *entonces* $\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{b_n}\} = \frac{1}{M}$.

***Demostración* :** Se tienen dos casos $M > 0$, ó, $M < 0$. Probaremos el caso $M > 0$ (El caso $M < 0$ se puede probar aplicando el mismo razonamiento a la sucesión $\{-b_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Así usamos $M > 0$ dado $\epsilon > 0$, debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}| < \epsilon$ $(\forall n \geq N_2)$, ó, $\frac{|b_n - M|}{|b_n M|} < \epsilon$ $(\forall n \geq N_2)$

Como $\{b_n\} \to M$, para $\frac{M}{2} > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - M| < \frac{M}{2}$, ó, también

$$-\frac{M}{2} < b_n - M < \frac{M}{2} \ (\forall n \geq N_1) \Leftrightarrow \frac{M}{2} < b_n < \frac{3M}{2} \ (\forall n \geq N_1)$$

así

$$|b_n| \geq b_n > \frac{M}{2} \ (\forall n \geq N_1) \tag{3}$$

También para $\frac{M^2\epsilon}{2}$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_n - M| < \frac{M^2\epsilon}{2} \ (\forall n \geq N_2) \tag{4}$$

Así si $N = max\{N_1, N_2\}$ tenemos, para $n \geq N$

$$\frac{|b_n - M|}{|b_n M|} = \frac{1}{|b_n| M} \cdot \frac{M^2\epsilon}{2} < \frac{2}{MM} \cdot \frac{M^2\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

□

Teorema 13. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales,* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ *donde* $M \neq 0$*, entonces* $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{L}{M}$.

***Demostración* :** Se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}\ .$$

□

Ejemplos:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n + 4n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 + \frac{4}{n^{1/2}}} = \frac{2}{1 + 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}}} = 2$

(2) Hallar el valor de $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4}$

2.1 $\frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \frac{n^2(3 - 6\frac{1}{n})}{n^2(5 + 4\frac{1}{n^2})} = \frac{3 - 6\frac{1}{n}}{5 + 4\frac{1}{n^2}}$

2.2 Ya hemos mostrado que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, además $\lim_{n\to\infty} c = c$

2.3. De todo lo anterior se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 6\frac{1}{n}}{5 + 4\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3 - 6\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(5 + 4\frac{1}{n^2})} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - 6 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 5 + 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}.$$

Resutado: *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, y ,* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tres sucesiones de números reales tales que* $a_n \le c_n \le b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

1.10. Operaciones con sucesiones divergentes.

Hemos visto que para sucesiones convergentes la suma, la diferencia, el producto y el cociente aún siguen siendo convergente. En sucesiones divergentes esto no sucede en general. Por ejemplo si las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{-a_n\}_{n=0}^{\infty}$ son ambas divergentes entonces la suma claramente no es divergente. Más aún el producto de la sucesión divergente $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ con si misma no es divergente. Sin embargo veamos el siguiente resultado.

Teorema 14. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales las cuales divergen a infinito, entonces su suma y su producto divergen a infinito. Esto es* $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *divergen a infinito.*

Demostración **:** Dado $M > 0$ se puede escoger $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ $(\forall n \ge \mathrm{N}_1)$ y escojamos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > 1$ $(\forall n \ge N_2)$ (Lo anterior es posible puesto que ambos límites $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$). Entonces, para $N = max\{N_1, N_2\}$ tenemos

$$a_n + b_n > M + 1 > M \ (\forall n \ge N) \ \text{ y } \ a_n \cdot b_n > M \cdot 1 = M \ (\forall n \ge N)$$

Puesto que M era un número positivo arbitrario, esto prueba el teorema.

□

Teorema 15. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones de números reales,* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a infinito y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada entonces* $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a infinito.*

Demostración **:** Por hipótesis existe $Q > 0$ tal que $|b_n| \le Q$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Dado $M > 0$ escojamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M + Q$ $(\forall n \ge N)$. Entonces para $n \ge N$ se tiene

$$a_n + b_n > a_n - |b_n| > (M + Q) - Q = M$$

Esto es

$$a_n + b_n > M \ \ (\forall n \ge N)$$

lo cual demuestra que $a_n + b_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

□

Corolario: *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a infinito y si* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge, entonces* $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a infinito.*

Demostración **:** (1) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge a infinito y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotado por ser convergente.

(2) Se sigue del teorema 15 que $\{a_n + b_n\} \to \infty$.

□

1.11. Límite superior e inferior

Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión convergente entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mide rapidamente "el tamaño de a_n cuando n es grande". Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ es un concepto usado solamente en conección con sucesiones convergentes. En esta sección introducimos un concepto relacionado con la acotación superior e inferior el cual puede aplicarse a cualquier sucesión. A grosso modo el límite superior de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la medida de "que tan grande a_n puede ser cuando n crece" y el límite inferior "que tan pequeño es a_n cuando n es grande". Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, es plausible que el límite superior y el límite inferior sean iguales.
Primero consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ la cual es acotada por encima, digamos que existe $M > 0$ tal que $a_n \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ es claramente acotado por arriba y por lo tanto tiene una mínima cota superior ó supremo

$$M_n = \text{sup.}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$$

Más aún, es facil ver que $M_n \geq M_{n+1}$ puesto que $M_{n+1} = \text{sup.}\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ es el supremo de un subconjunto de $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$. Así la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y por lo tanto se tendra una de dos cosas, es convergente ó es decreciente a menos infinito.

Definición : *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales acotada por arriba y sea* $M_n = \text{sup.}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$

(a) *Si* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge , definimos* $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$

(b) *Si* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a menos infinito escribimos* $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = -\infty.$

Por ejemplo, sea $a_n = (-1)^n (n \in \mathbb{N})$. Entonces $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada por arriba. En este caso $M_n = 1$ para cada $n \in N$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1.$
Así

$$\lim_{n\to\infty} \text{sup.}\, (-1)^n = 1.$$

Consideremos enseguida la sucesión $\{1, -1, 1, -2, 1, -3, 1, -4, 1, \cdots\}$, de nuevo $M_n = 1$ para cada n y así el límite superior de esta sucesión es 1. Si $a_n = -n$ entonces $M_n = \text{sup.}\{-n, n-1, -n-2, \cdots\} = -n$, por lo tanto $M_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$, así $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = -\infty$.

Definición : *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales la cual no está acotada superiormente, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = \infty.$

En este punto el lector podrá verificar las siguientes afirmaciones:

(1) Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada por arriba y tiene una subsucesión la cual es acotada por debajo por A, entonces $\lim_{n\to\infty} \sup. a_n \geq A$

(2) Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ no tiene subsucesiones las cuales son acotadas por debajo entonces $\lim_{n\to\infty} sup\, a_n = -\infty$.

Notemos que cambiando un número finito de términos de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ no cambia el $\lim_{n\to\infty} \sup. a_n$. Así, el límite superior de la sucesión $\{10^{100}, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots\}$ es 1.

Teorema 16. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión convergente de números reales, entonces* $\lim_{n\to\infty} \sup. a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$

Demostración **:** Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \epsilon \;\; (\forall n \geq N)$, ó, $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \; (\forall n \geq N)$. Así, $n \geq N$, entonces $L + \epsilon = cota\, superior\, \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ y $L - \epsilon$ no es cota superior. Por lo tanto

$$L - \epsilon < M_n = \sup.\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leq L + \epsilon$$

se sigue de la monotonía del límite que

$$L - \epsilon \leq \lim_{n\to\infty} M_n \;\; \leq L + \epsilon$$

Pero $\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup. a_n$. Así

$$L - \epsilon \leq \lim_{n\to\infty} \sup. a_n \leq L + \epsilon \;\Leftrightarrow |\; \lim_{n\to\infty} \sup. a_n - L| \leq \epsilon$$

Puesto que ϵ es arbitrario, esto implica $\lim_{n\to\infty} \sup. a_n = L$, lo cual muestra la afirmación.

$\square$

Definamos ahora el límite inferior. Si la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada por debajo entonces el conjunto $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ tiene un ínfimo, ó, una máxima cota inferior. Si tomamos $m_n = \inf.\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ entonces $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente $(verifíquelo)$ y por lo tanto sucederá que la sucesión converge, ó, diverge a infinito.

Definición: *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales la cual es acotada por debajo y sea* $m_n = \inf.\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ (a) *Si* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge, entonces definimos* $\lim_{n\to\infty} \inf. a_n = \lim_{n\to\infty} m_n$ (b) *Si* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge a infinito, entonces* $\lim_{n\to\infty} \inf. a_n = \infty$.

Así $\lim_{n\to\infty} \inf.(-1)^n = -1$, $\lim_{n\to\infty} \inf. n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \inf.(-n) = -\infty$. La sucesión $\{1, -1, 1-2, 1-3, 1, -4, \cdots\}$ tiene $\lim_{n\to\infty} \inf.\{1, -1, -2, 1, \cdots\} = -\infty$.

Teorema 17. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales, entonces* $\lim_{n\to\infty} \inf. a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup. a_n.$

Demostración **:** Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces

$$m_n = \inf.\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \leq \sup.\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} = M_n\,.$$

Así $m_n \le M_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} m_n \le \lim\limits_{n\to\infty} M_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \text{inf.} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n$.
Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ no es acotada, entonces se tiene una de las siguientes afirmaciones $\lim\limits_{n\to\infty} \text{inf.} a_n = -\infty$, ó, $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = \infty$ y en ese caso se sigue la desigualdad deseada.
□

Teorema 18. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales y*
$$\lim_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \text{inf.}\, a_n = L$$
donde $L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es convergente y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Demostración **:** Por hipótesis tenemos
$$L = \lim_{n\to\infty} \text{sup.} a_n = \lim_{n\to\infty} \text{sup.}\, \{ a_n,\, a_{n+1}, \cdots\}.$$
Así dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$|\text{sup.}\, \{ a_n,\, a_{n+1}, \cdots\} - L| < \epsilon \;\; (\forall n \ge N_1) \Leftrightarrow a_n - L < \text{sup.}\, \{ a_n,\, a_{n+1}, \cdots\} - L < \epsilon$
esto implica
$$a_n < L + \epsilon \quad (\forall n \ge N_1)$$
Análogamente, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \text{inf.} a_n = L$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que
$$|\text{inf.}\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} - L| < \epsilon \quad (\forall n \ge N_2)$$
pero esto es equivalente a
$$-\epsilon < \text{inf.}\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} - L < a_n - L \quad (\forall n \ge N_2)$$
Si se toma $N = \text{max.}\{N_1, N_2\}$, entonces tenemos
$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \qquad (\forall n \ge N)$$
lo cual es equivalente a
$$-\epsilon < a_n - L < \epsilon \;\; (\forall n \ge N) \;\Leftrightarrow\; |a_n - L| < \epsilon \quad (\forall n \ge N)$$
esto prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.
□

Hay un resultado análogo en sucesiones divergentes a infinito.

Teorema 19. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales y si*
$$\lim_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} \text{inf.}\, a_n$$
entonces $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverge hacia infinito.*

Demostración **:** Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sup.}\, a_n = \infty$, entonces dado $M > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\text{sup.}\, \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} > M$$
Esto implica que M es una cota inferior (pero no el supremo) para $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$, así que $a_n > M$ $(\forall n \ge\ )$ lo cual establece la conclusión requerida. □

Hay un análogo obvio del resultado anterior para sucesiones divergentes a menos infinito, que el lector podrá formular y probar.

Teorema 20. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones acotadas de números reales y si* $a_n \leq b_n\ (\forall n \in \mathbb{N})$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sup.\, a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup.\, b_n \quad \textit{y} \quad \lim_{n\to\infty} \inf.\, a_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf. b_n.$$

Demostración **:** Por hipótesis $a_n \leq b_n$ es claro que

$$mínima\, cota\, superior\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leq mínima\, cota\, superior\{b_n, b_{n+1}, \cdots\}$$

y

$$máxima\, cota\, inferior\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leq máxima\, cota\, inferior\{b_n, b_{n+1}, \cdots\}$$

(¿como puede Ud. probar esto?). Tomando el límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados de estas desigualdades tenemos probado el resultado.

□

No es siempre verdad que

$$\lim_{n\to\infty} \sup.(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \sup.\, a_n + \lim_{n\to\infty} \sup.\, b_n$$

aún para sucesiones acotadas $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Por ejemplo, si $a_n = (-1)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ y $b_n = (-1)^{n+1}\ (\forall n \in \mathbb{N})$, entonces $b_n + a_n = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$.
De aquí $\lim_{n\to\infty} \sup.\, a_n = 1 = \lim_{n\to\infty} \sup.\, b_n,$ pero $\lim_{n\to\infty} \sup.(a_n + b_n) = 0.$
Hay sin embargo una importante desigualdad que puede ser probada.

Teorema 21. *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones acotadas de números reales entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sup.(a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup.\, a_n + \lim_{n\to\infty} \sup.\, b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf.(a_n + b_n) \geq \lim_{n\to\infty} \inf.\, a_n + \lim_{n\to\infty} \inf.\, b_n.$$

Demostración **:** (a) Sean $M_n = \sup.\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$, $P_n = \sup.\{b_n, b_{n+1}, \cdots\}$.
Entonces

$$a_k \leq M_n\ (\forall k \geq n), \quad b_k \leq P_n\ (\forall k \geq n)$$

y así

$$a_k + b_k \leq M_n + P_n \ \ (\forall k \geq n)$$

De aquí $M_n + P_n$ es una cota superior para $\{a_n + b_n, a_{n+1} + b_{n+1}, \cdots\}$, así que

$$\sup.\{a_n + b_n, a_{n+1} + b_{n+1}, \cdots\} \leq M_n + P_n$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup.\{a_n + b_n, a_{n+1} + b_{n+1}, \cdots\} \leq \lim_{n\to\infty} (M_n + P_n) = \lim_{n\to\infty} M_n + \lim_{n\to\infty} P_n$$

o sea

$$\lim_{n\to\infty} \sup.\{a_n + b_n\ \} \leq \lim_{n\to\infty} \sup.\, a_n + \lim_{n\to\infty} \sup.\, b_n$$

lo cual es precisamente la afirmación (a).
(b) Se deja como un ejercicio al lector.

□

Hay otra forma de definir límite superior y límite inferior. El siguiente teorema nos muestra una de tales aproximaciones.

Teorema 22. *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión acotada de números reales*

1. Si $\lim_{n\to\infty} \sup. a_n = M$, *entonces para cada* $\epsilon > 0$

$(a)\, a_n < M + \epsilon$ *para todo valor numérico finito de* n

$(b)\, a_n > M - \epsilon$ *para infinidad de valores de* n.

2. Si $\lim_{n\to\infty} \inf. a_n = m$, *entonces para cada* $\epsilon > 0$,

$(c)\, a_n > m - \epsilon$ *para todo número finito de valores de* n

$(d)\, a_n < m + \epsilon$ *para una infinidad de valores de* n.

Demostración **:** Mostremos solamente la parte 2. Si (c) fuese falsa, entonces, para algún $\epsilon > 0$, podríamos tener $a_n \leq m - \epsilon$ para infinidad de valores de n. Pero entonces para algún $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ podría contener un número de términos $\leq m - \epsilon$ para una infinidad de valores de n. Esto implica que

$$máxima\, cota\, inferior\, \{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leq m - \epsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

y pasando al límite obtendríamos, por la monotonía del límite, que

$$\lim_{n\to\infty} \inf. a_n \leq m - \epsilon$$

lo cual es contradictorio→←, con la hipótesis. Así (c) es verdadero.

Ahora supóngase (d) falso. Entonces para algún $\epsilon > 0$, $a_n < m + \epsilon$ pero solamente para un número finito de valores de n. Pero entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq m + \epsilon$ $(\forall n \geq N)$. Por la monotonía del límite inferior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \inf. a_n \geq m + \epsilon$$

lo cual de nuevo va contra→← la hipótesis. Así (d) es verdadera .

□

Se sigue del resultado anterior que si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales y si $M \in \mathbb{R}$ es tal que (a) y (b) se tienen para cada $\epsilon > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sup. a_n = M$$

Análogamente, si $m \in \mathbb{R}$ es tal que (c) y (d) se tienen para cada $\epsilon > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \inf. a_n = m.$$

Usando el teorema 22 podemos probar el siguiente resultado útil.

Teorema 23. *Cualquier sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.*

Demostración **:** Supóngase que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales y sea $M = \lim_{n\to\infty} \sup. a_n$. Construyamos una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ la cual converge a M. De la parte (a) del teorema 22 hay una infinidad de valores de n tales que $a_n > M - 1$. Sea n_1 uno cualquiera de tales valores de n así $a_{n_1} > M - 1$. Análogamente como hay infinidad de tales valores de n tales que $a_n > M - \frac{1}{2}$, podemos hallar $n_2 \in \mathbb{N}$ para el cual $n_2 > n_1$ y $a_{n_2} > M - \frac{1}{2}$. Continuamos en esta forma, para cada entero $k > 1$ podemos hallar $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_{k-1}$ y

$$a_{n_k} > M - \frac{1}{k} \qquad (1)$$

Dado $\epsilon > 0$ por (a) del teorema 22 podemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n < M + \epsilon \quad (\forall n \geq N) \qquad (2)$$

Ahora se escoge $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K} < \epsilon$ y $n_K > N$. Entonces, si $k \geq K$ por (1) y (2) se tendrá

$$M - \epsilon < M - \tfrac{1}{k} < a_{n_k} < M + \epsilon \quad (\forall k \geq K)$$

lo cual implica que

$$|a_{n_k} - M| < \epsilon \quad (\forall k \geq K)$$

Esto prueba que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = M$, lo cual demuestra nuestra afirmación.

□

1.12. Sucesiones de Cauchy

El más importante criterio para probar que una sucesión converge sin conocer su límite es llamado "**criterio de Cauchy**"

Definición: *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales. Entonces* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es llamada una sucesión de Cauchy si para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

si $m, n \geq N$ *entonces* $|a_m - a_n| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon \ (m, n \geq N)$.

A grosso modo una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy si a_m y a_n estan muy próximos cuando n es muy grande.

Teorema 24. *Si la sucesión de números reales* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge entonces* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy.*

***Demostración*:** Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_k - L| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad (\forall k \geq N)$$

Así si $m, n \geq N$ tenemos

$$|a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

así que $|a_m - a_n| < \epsilon \ (m, n \geq N)$ lo cual prueba de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

Lema : *Si* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy de números reales entonces* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es acotada.*

***Demostración*:** Dado $\epsilon = 1$, escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - a_n| < 1$ $(m, n \geq N)$. Entonces

$$|a_m - a_N| < 1 \ (m \geq N) \tag{1}$$

Por lo tanto, si $m \geq N$, tenemos

$$|a_m| = |(a_m - a_N) + a_N| \leq |a_m - a_N| + |a_N|$$

y así usando (1) tenemos

$$|a_m| \leq 1 + |a_N| \quad (\forall n \geq N)$$

Si tomamos $M = \max.\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots, |a_{N+1}|\}$, entonces

$$|a_m| < M + 1 + |a_N| \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

de aquí se sigue que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada.
□

Teorema 25. *Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números reales entonces $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente.*

Demostración **:** Por el lema conocemos que $\lim_{n\to\infty}\sup.\, a_n$ y $\lim_{n\to\infty}\inf.\, a_n$ son números reales finitos. Para la existencia del límite basta con mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\sup.\, a_n = \lim_{n\to\infty}\inf.\, a_n$$

Por el teorema de la convergencia monótona conocemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sup. a_n \geq \lim_{n\to\infty}\inf.\, a_n$$

Así solamente necesitamos probar que $\lim_{n\to\infty}\sup.\, a_n \leq \lim_{n\to\infty}\inf.\, a_n$

Puesto que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_m - a_n| < \tfrac{\epsilon}{2} \ \ (m, n \geq N)$$

y así

$$|a_N - a_n| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad (\forall n \geq N)$$

Se sigue que $a_N + \frac{\epsilon}{2}$ y $a_N - \frac{\epsilon}{2}$ son respectivamente las cotas superior e inferior del conjunto $\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\}$. Por lo tanto si $n \geq N$, $a_N + \frac{\epsilon}{2}$ y $a_N - \frac{\epsilon}{2}$ son cotas superior e inferior par $\{a_{\mathrm{n}}, a_{\mathrm{n+1}}, a_{\mathrm{n+2}}, \cdots\}$. Esto implica que para $n \geq N$

$$a_N - \tfrac{\epsilon}{2} \leq máxima\, cota\, inferior\,\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$$
$$\leq mínima\, cota\, superior\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \leq a_N + \tfrac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto los extremos izquierdo y derecho de esta desigualdad difieren en ϵ, tenemos así

$$mín.\, cota\, superior\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} - máx.\, cota\, inferior\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \leq \epsilon$$

Tomando el límite en ambos lados y por la monotonía del límite obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sup. a_n \leq \lim_{n\to\infty}\inf.\, a_n + \epsilon$$

Puesto que ϵ era arbitrario, esto establece que $\lim_{n\to\infty}\sup.\, a_n \leq \lim_{n\to\infty}\inf.\, a_n$, lo cual era lo queríamos mostrar

Fin del primer bloque

1.13. Ejercicios resueltos.

1. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \ \ (a > 0)$

Solución **:** Si $a > 1$ tómese $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ entonces $x_n > 0$, tenemos

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = a$$

luego

$$0 < x_n \leq \tfrac{a-1}{n}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ o sea $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$

Si $a < 1$, sea $a_1 = \frac{1}{a} > 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

Si $a = 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$

2. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1, k > 0)$

Solución : (a) Si $k = 1$, sea $a = 1 + h \ (\forall h > 0)$, tenemos

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(b) Si $k < 1$ entonces $0 \le \frac{n^k}{a^n} \le \frac{n}{a^n} \longrightarrow 0$ (cuando $n \to \infty$)

(c) Si $k > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(a^{1/k})^n} = 0$ ya que $a^{1/k} > 0$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{(a^{1/k})^n}\right]^k = 0.$$

3. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Solución : Sea $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ entonces $x_n \ge 0$ y tenemos

$$n = (x_n + 1)^n \ge 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}(x_n)^2 \ge \frac{n(n-1)}{2}(x_n)^2$$

Luego

$$0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + x_n) = 1.$$

4. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Solución : Sea k un número natural tal que $k > 2a$ y sea $\frac{a^k}{k!} = c$

Si $n > k$ entonces tenemos

$$0 \le \frac{a^n}{n!} = c \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{n} < \frac{c}{2^{n-k}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

5. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$

Solución : Sea $y_n = \frac{\log n}{n}$ entonces $\log n = ny_n$. Tomando exponencial a los dos lados tenemos

$$n = e^{ny_n} > 1 + ny_n + \frac{(ny_n)^2}{2} > \frac{(ny_n)^2}{2}$$

Luego

$$0 < y_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0.$$

6. $Sea\ \{a_n\}_{n=0}^{\infty}\ \ una\, sucesi\text{ó}n\, tal\, que\ \ a_{n+1}=\sqrt{1+\sqrt{a_n}}\,,\ a_1=1.\, Demostrar\, que$ $la\, sucesi\text{ó}n\, es\ convergente\,.$

$\boldsymbol{Soluci\text{ó}n}$ **:** Tenemos

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{1+\sqrt{a_n}}-\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}=\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{a_n}}\right)^2-\left(\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}\right)^2}{\sqrt{1+\sqrt{a_n}}+\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{a_n}-1-\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{1+\sqrt{a_n}}+\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{1+\sqrt{a_n}}+\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}}$$ .....etc. (vea ejercicio 68)

1.14. Ejercicios

1. Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, si $s_n\leq$ M y si $\lim_{n\to\infty} s_n=L$ probar que $L\leq M$.
2. Si $L\in\mathbb{R}$, $M\in\mathbb{R}$ y $L\leq M+\epsilon$ para todo $\epsilon>0$, probar que $L\leq M$.
3. Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y si, para cada $\epsilon>0$, $|s_n-L|<\epsilon$ $(n\geq N)$ donde N no depende de ϵ, pruebe que a partir de un número finito los términos de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son iguales a L.
4.(a) Hallar N $\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq$ N, entonces $|\frac{2n}{n+3}-2|<\frac{1}{5}$
   (b) Pruebe que $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2.$
5.(a) Halle N $\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq$ N entonces $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<0.03$
   (b) Pruebe que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$
6.Para cada una de las siguientes sucesiones probar en cada caso, si la sucesión es convergente o divergente, en el caso convergente halle el límite.
   (a) $\left\{\frac{n^2}{n+5}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left\{\frac{3n}{n+5}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (c) $\left\{\frac{3\text{n}}{n+7\text{n}^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
7. (a) Pruebe que la sucesión $\left\{\frac{10^7}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a 0.
   (b) Pruebe que $\left\{\frac{\text{n}^7}{10}\right\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite.
8. Pruebe que $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite.
9. Si $s_n=\frac{5^n}{n!}$, muestre que $\lim_{n\to\infty}s_n=0$ $(Ayuda:\ Pruebe\, que\ \ s_n<\frac{5^5}{5!}\cdot\frac{5}{n}\ \ si\, n>5)$
10. Si P es una función polinomial de tercer grado

$$\text{P}(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a,b,c,d,x\in\mathbb{R})$$

   probar que $\lim_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{P(n)}=1.$
11.Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión definida por

$$s_1=1,$$
$$s_2=1,$$
$$s_{n+1}=s_n+s_{n-1}\qquad(n=3,4,5,\dots)$$

Halle s_8 $(Estos\, n\text{ú}meros\, s_n\, son\, llamados\, los\, \boldsymbol{n\text{ú}meros\, de\, Fibonacci}\,)$.
12. Escriba la fórmula o " término general s_n" para cada una de las siguientes sucesiones (Por ejemplo, la sucesión 2,1,4,3,6,5,8,7,… puede ser definida por

$$s_n = \begin{cases} n+1, \; si \; n \; es \, impar \\ n-1, \; si \, n \, es \, par \end{cases}$$

(a) 1,0,1,0,1,0,...
(b) 1,3,6,10,15,...
(c) $1, -4,9, -16, 25, -36, \ldots$
(d) $1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \ldots$

13. ¿Cada una de las sucesiones (a), (b), (c), (d) en el ejercicio anterior son subsucesiones de $\{n\}_{n=1}^{\infty}$?

14. Si $S = \{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ y $K = \{n_i\}_{i=1}^{\infty} = \{i^2\}_{i=1}^{\infty}$ hallar $s_5, s_9, n_{2,} s_{n_2}$. ¿ Es K una subsucesión de $\{k\}_{k=1}^{\infty}$?

15. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se muestra que $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$. Entonces demostrar que $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $|L|$ si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L.

16. Dar un ejemplo de una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales , para la cual $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge pero $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge.

17.Probar que si $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 entonces $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0.

18.¿ Puede usted hallar una sucesión de números reales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual no tenga subsucesiones convergentes y sin embargo se tenga que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente ?

19. Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y si

$$\lim_{m \to \infty} s_{2m} = L, \quad \lim_{m \to \infty} s_{2m-1} = L,$$

pruebe que $s_n \to L$ cuando $n \to \infty$ (Esto es, si las subsucesiones de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de términos pares y de términos impares convergen a L, entonces la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a L).

20. Estudiar cada una de las siguientes sucesiones según sean (A) convergentes, (B) divergentes a infinito, (C) divergentes a $-\infty$,(D) oscilantes. (Use su intuición o su información sobre cursos de cálculo. No intente probar ninguna afirmación)

(a) $\{sen(\frac{n\pi}{2})\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{sen \; n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ (c) $\{e^n\}_{n=1}^{\infty}$ (d) $\{e^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$
(e) $\{n \, sen(\frac{\pi}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ (f) $\{(-1)^n tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$
(g) $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ (h) $\{-n^2\}_{n=1}^{\infty}$

21. Pruebe que $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a infinito.

22. Pruebe que $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente (Ayuda: recuerde el método para hallar $\frac{dy}{dx}$ por el proceso Δx donde $y = \sqrt{x}$)

23. Pruebe que si la sucesión de números reales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge hacia infinito entonces $\{-s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a menos infinito.

24. Supóngase que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0. Pruebe que $\{(-1)^n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

25. Suponga que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $L \neq 0$. Pruebe que $\{(-1)^n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión oscilante.

26. Supóngase que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a infinito. Pruebe que $\{(-1)^n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión oscilante.

27. Es verdad o falso, que si una sucesión de números positivos no es acotada entonces la sucesión diverge a infinito.

28. Dar un ejemplo de una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual no es acotada pero que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = 0$

29. Pruebe que si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}\neq 0$, entonces $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada.
30. Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales, y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, pruebe que $\{s_nt_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.
31. Si la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, pruebe que para cualquier $\epsilon>0$ existe un intervalo cerrado J $\subset\mathbb{R}$ de longitud ϵ tal que $s_n\in$ J para infinidad de valores de n.
32 ¿Cuales de las siguientes sucesiones son monótonas ?

(a) $\{sen\, n\}_{n=1}^{\infty}$ $(b)\ \{tan\, n\}_{n=1}^{\infty}$ $(c)\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

$(d)\{2n+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

33. Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada por arriba y $\mathrm{L}=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$, probar que $\mathrm{s}_n\leq$ L. para todo $n\in\mathbb{N}$. Formule el resultado dual para sucesiones decrecientes.
34. Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones crecientes y si $s_n\leq t_n\ (n\in\mathbb{N})$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty}s_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}t_n$.
35. Si $\mathrm{s}_n=\frac{10^n}{n!}$ hallar $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tal que $s_{n+1}<s_n\ (n\in\mathbb{N})$
36. Hallar el límite de $\{n^{-n-1}(n+1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
37. Para $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, sea $\mathrm{s}_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$. Probar que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}s_n\leq\frac{1}{2}$.
38. Para $n\in\mathbb{N}$ sea $s_n=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{n^2}$. Verifique que $s_1>s_2>s_3$. Probar que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.
39. Para $n\in\mathbb{N}$ sea $t_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ (a) Probar que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente (b) Usando solamente hechos establecidos en la prueba de $\lim\limits_{n\to\infty}\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$, para probar que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada por encima y probar que $\lim\limits_{n\to\infty}t_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
40. Pruebe (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n}{4n^3+n^2}=\frac{1}{2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n-7)^2-6}=1$
41. Probar que si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a 1, entonces $\{s_n^{1/2}\}_{n=1}^{\infty}$ es también convergente a 1.
42. Evalúe $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
45. Supóngase que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos y $0<x<1$. Si $s_{n+1}<xs_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$.
46. Supóngase $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n-1}{s_n+1}=0$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=1$ $[\,Ayuda:\ Sea\,\epsilon_n=\frac{s_n-1}{s_n+1}\ y\ resuelva\, para\, s_n\}$. ¿Cuales teoremas Ud. usa en su demostración ?
47. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$. También pruebe $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=e$.
¿Cuales teoremas Ud. usa en su demostración ?
48. Si $\mathrm{c}>1$, pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1\,[Ayuda:Escriba\ \sqrt[n]{c}=1+s_n\ \ y\ tome\, la\ n\text{-}ésima\, potencia\, en\, ambos\, lados\, para\, demostrar\, que\ \{ns_n\}_{n=1}^{\infty},\ \ es\ \ acotada.\ Entonces\, concluya\, que\ \ s_n\to0\ \ cuando\ \ n\to\infty\,]$
49. Sea $s_1=\sqrt{2}$ y sea $s_{n+1}=\sqrt{2}\sqrt{s_n}$ para $n\geq1$

(a) Pruebe , por inducción que $s_n\leq2$ para todo n

(b) Pruebe que $s_{n+1} \geq s_n$ para todo n
(c) Pruebe que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente
(d) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2.$

50. Supóngase $s_1 > s_2 > 0$ y sea $s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1})\,(n \geq 2)$. Pruebe que
(a) $s_1, s_3, s_5, \ldots,$ es decreciente
(b) $s_2, s_4, s_6, \ldots$ es creciente
(c) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

51. Dar un ejemplo de sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ para las cuales, cuando n tiende a infinito
(a) $s_n \to \infty$, $t_n \to -\infty$ y $s_n + t_n \to \infty$
(b) $s_n \to \infty$, $t_n \to \infty$ y $s_n - t_n \to 7$

52. Supóngase que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión divergente de números reales y $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Probar que $\{cs_n\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

53. ¿Es verdad o falso? Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es oscilante y no acotada, y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada entonces $\{s_n + t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es oscilante y no acotada.

54. Halle el límite superior y el límite inferior para las siguientes sucesiones
(a) 1,2,3,1,2,3,1,2,3,... (b) $\{sen(\frac{n\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}}$
(c) $\{(1+\frac{1}{n})cos\, n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ (d) $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$

55. Si el límite superior de la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a M, pruebe que el límite superior de cualquier subsucesión de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $\leq$ M.

56.Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales y $\lim\limits_{n\to\infty} inf\, s_n = m$, pruebe que hay una subsucesión de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual es convergente hacia m.
También, pruebe que ninguna subsucesión de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede converger a un límite menor que m.

57. Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales divergente hacia infinito, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} sup\, s_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} inf\, s_n$. (Esto es, el inverso de un resultado probado en la clase ¿Cual es?). Formule y pruebe el correspondiente resultado para sucesiones convergentes hacia menos infinito.

58. Escriba el conjunto de todos los números racionales del intervalo (0,1) como el conjunto $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} sup\, r_n$, y $\lim\limits_{n\to\infty} inf\, r_n$
$(Ayuda:\ use\ el\ teorema$ 22.)

59. Pruebe que si la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes entonces $\{|s_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a infinito.

60. Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y si

$$\sigma_n = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}\ (n \in \mathbb{N})$$

Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} sup\, \sigma_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} sup\, s_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} inf\, s_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} inf\, \sigma_n$
$(Ayuda: Use\ el\ teorema$ 22.)

61. Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales la cual tiene una subsucesión convergente hacia L, entonces $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge hacia L.

62. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$t_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Pruebe que si $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces también $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

63. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para todo $a > 0$

64. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ para $a > 0$ y $k > 0$

65.Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

66. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ para todo $a > 0$

67. Demuestre que :

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{log\, n}{n} = 0$ (donde log es el logaritmo natural)

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(log\, n)^k}{n} = 0$ (k es una constante) (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{log\, n}{n^k} = 0$ $(k > 0)$

68. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$, $a_1 = 1$. Demostrar que esta sucesión es convergente.

69. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_{n+1} = \lambda a_n$ (λ es una constante) , estudiar convergencia o divergencia de la sucesión.

70. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $a_1 = 1$, demostrar que $\{a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente a infinito.

71. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$. Demostrar que tiene un límite L $= \sqrt[3]{a_1 a_2^2}$

72. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $(a_n)^2 = ca_{n-1}$ $(c > 0,\ a_1 > 0)$. Demostrar que la sucesión converge a c.

73. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}a_{n-1}$ para todo n , entonces demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

74. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$$a_{n+1} + ba_n + ca_{n-1} = 0 \quad (b, c \text{ son constantes })$$

hallar $\lim_{n\to\infty} a_n$

75. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos no negativos, demostrar que:

(a) $\lim_{n\to\infty} sup\, \{a_n\}^k = \{ \lim_{n\to\infty} sup\, a_n\}^k$ $(k > 0,\ k$ es constante.)

(b) $\lim_{n\to\infty} inf\, \{a_n\}^k = \{ \lim_{n\to\infty} inf a_n\}^k$ $(k > 0,\ k$ es constante.)

§2. SERIES DE NUMEROS REALES

2.1. Introducción.

Recordemos que la suma de la serie infinita $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ es definida como $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, probando que el límite existe. Esto, sin embargo, es la definición de la suma de una serie infinita y no es la definición de « serie infinita » en si misma, pues para ello se requiere de un par ordenado de sucesiones.

Definición: *Una serie infinita* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una pareja ordenada* $\langle\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n=0}^{\infty}\rangle$ *donde* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de números reales y* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. *El número* a_n *es llamado el* n*-ésimo término de la serie. El número* s_n *es llamado la* n*-ésima suma parcial de la serie.*

Notacionalmente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la podemos con frecuencia indicar con $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ ó simplemente con $a_1 + a_2 + \cdots$

Como un ejemplo la n-ésima suma parcial de la serie $1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$ si n es par da 1 y si n es impar da 0.

Es con frecuencia conveniente iniciar los términos de una serie empezando con $n = 0$ o cualquier número $p \neq 1$ cuidando siempre que el término $n-$ésimo tenga sentido. Esto es, escribimos algunas series como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (en este caso se entiende que $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$). Así la serie $1 + x + x^2 + \cdots$ se puede escribir $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Es sin embargo trivial verificar que cualquier definición ó teorema a cerca de series escritas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene exacto análogo para series escritas en la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ó, $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ para cualquier $p \geq 0$.

La definición de convergencia ó divergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ depende de la convergencia ó divergencia de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición: *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de números reales con sumas parciales* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$. *Si la sucesión* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $A \in \mathbb{R}$, *podemos decir que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge hacia* A. *Si* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverge, decimos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge hacia A, con frecuencia escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Así usamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no solamente para denotar la serie sino también para denotar su suma (en el caso de series convergentes). Con esta advertencia dejamos al lector convencerse así mismo que no se tienen ambigüedades. Como una consecuencia de las sucesiones se siguen los siguientes resultados.

Teorema 1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es serie convergente hacia* A *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge a* B*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *converge hacia* $A+B$*. También si* $c \in \mathbb{R}$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *converge a* cA.

Demostración **:** Si $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ entonces por hipótesis $\lim_{n\to\infty} s_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = B$. Pero la n-ésima suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ es $(a_1+b_1) + (a_2+b_2) + \cdots + (a_n+b_n) = s_n + t_n$, así

$$\lim_{n\to\infty}(s_n+t_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(s_k+t_k) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = A + B.$$

Una consecuencia obvia es $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = A - B$.

Teorema 2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración **:** Supóngase que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = A$ donde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Pero entonces $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A$. Puesto que $a_n = s_n - s_{n-1}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A - A = 0.$$

□

Así vemos inmediatamente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{1+2n}$ debe diverger, puesto que $a_n = \frac{1-n}{1+2n}$ y se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \neq 0$. Análogamente $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ debe ser divergente puesto que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe.

Enfatizamos que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no es suficiente para asegurar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente. En la sección siguiente se verá que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ no converge, sin embargo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

2.1.1. Series Telescópicas.

Una importante propiedad de las sumas finitas es conocida como propiedad telescópica dada por

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Cuando examinamos una extensión de esta propiedad para series infinitas consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en la cual cada término a_n puede ser expresado como la diferencia de dos términos sucesivos de una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$, entonces esta serie es conocida como `serie telescópica` y cuya conducta está caracterizada por el siguiente resultado.

Resultado.*Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones tales que* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y sólo si* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente, en tal caso tenemos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L$, *donde* $L = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Demostración: Sea s_n denotando la n-ésima suma de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces tenemos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Por lo tanto ambas sucesiones $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen o ambas divergen. Además si $b_n \to L$ cuando $n \to \infty$ entonces $s_n \to b_1 - L$ y esto completa la prueba del resultado.
$\square$

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$ es convergente.

2.2. Series con términos positivos.

Las series más faciles de tratar son aquellas cuyos términos son positivos. Para estas series toda la teoria en convergencia y divergencia es abarcada en los siguientes teoremas.

Teorema 3. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie de números no negativos con*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \, (\forall n \in \mathbb{N}),$$

entonces

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si la sucesión* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada;*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge si* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no es acotada.*

Demostración : (a) Puesto que $a_{n+1} \geq 0$ tenemos

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Así $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y por hipótesis acotada, entonces $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y así $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$no es acotada, entonces $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge . Por lo tanto también $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

□

Damos dos ej$e$mplos importantes de series con términos positivos. El primero es la serie geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Teorema 4. (a) *Si* $0 < x < 1,$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ *converge a* $\frac{1}{1-x}$

(b) *Si* $x \geq 1,$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ *es divergente.*

Demostración **:** La conclusión de (b) es inmediata puesto que $\lim_{n\to\infty} x^n$ no existe y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ es divergente.

(a) Tomemos

$$\begin{array}{rl} & s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ +) & \underline{-xs_n = \ -x - x^2 - \cdots - x^n - x^{n+1}} \\ & s_n(1-x) = 1 - x^{n+1} \end{array}$$

Luego $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Pero ya mostramos que si $0 < x < 1,$ entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ así hemos probado (a).

□

El segundo ejemplo es la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ conocida como la « ***serie armónica*** » .

Teorema 5. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente.*

Demostración **:** Examinemos la subsucesión $s_1, s_2, s_4, s_8, \cdots, s_{2^n}, \cdots$ de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde en este caso, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$ Tenemos

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} \\ s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 2 \\ s_8 &= s_4 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > 2 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

en general, podemos mostrar por inducción que $s_{2^n} > \frac{n+2}{2}.$ Así $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión divergente, luego $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

□

Hacemos incapie en el hecho de que la divergencia de la serie armónica muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede diverger y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Para series con términos positivos solo introducimos la siguiente notación: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces simplemente escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente de términos positivos, algunas veces escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Así $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Es muy importante notar que no hay series que divergen «tan lentamente como sea posible». Más exactamente.

Teorema 6. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie divergente de números positvos, entonces hay una sucesión* $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de números positivos la cual es convergente a cero para la cual* $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ *todavía diverge.*

***Demostración* :** Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Nos basta mostrar que la serie $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{s_k}$ es divergente

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} \geq \sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{n+1}} = \frac{1}{s_{n+1}}\{(s_{m+1}-s_m)+(s_{m+2}-s_{m+1)}+\cdots+(s_{n+1}-s_n)\}$$

$$= \frac{s_{n+1}-s_m}{s_{n+1}} > \frac{s_{n+1}-\frac{1}{2}s_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Las sumas parciales de la serie $\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}$ no forman una sucesión de Cauchy y por lo tanto $\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} = \infty$.

Pero $s_{k+1} - s_k = a_{k+1}$. Así $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{s_{k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{s_k} = \infty$.

Sea $\epsilon_k = \frac{1}{s_k}$. Entonces $\epsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ y $\sum_{k=2}^{\infty} \epsilon_k a_k = \infty$.

$\square$

2.3. Series alternadas.

Una serie alternada es una serie infinita cuyos términos alternan en signo. Por ejemplo $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \cdots$, $1 - 2 + 3 - 4 + - \cdots$, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ son todas series alternadas. Una serie alternada puede también escribirse como $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ donde a_n es un número positivo [ó como $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ si el primer término de la serie es negativo] . Demostremos ahora un resultado fundamental para series alternadas

Teorema 7 **(Prueba de Leibniz).** *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de números positivos tales que*

(a) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$*. Esto es, la sucesión es decreciente y*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Entonces la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *es convergente.*

***Demostración* :** Considere primero las sumas parciales con índices impar $s_1, s_3, s_5, \cdots$ Tenemos $s_3 = s_1 - (a_2 - a_3) \ \wedge \ a_2 - a_3 \geq 0$ por lo tanto $s_3 \leq s_1$. En realidad , para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos $s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1}$, así la sucesión $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Ahora como

$$s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$$

y como cada cantidad dentro de los paréntesis es positiva y $a_{2n-1} > 0$ se tiene que $s_{2n-1} > 0$, en esta forma $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de términos positivos, luego esta acotada por debajo, entonces es convergente. Análogamente la sucesión de sumas parciales par $s_2, s_4, \cdots, s_{2n}, \cdots$ y como $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n-1} - a_{2n+2} \geq s_{2n}$ entonces $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente; además

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

así $s_{2n} \leq a_1$ por lo tanto $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y acotada por encima, se sigue que es una suceción convergente. Sean ahora $M = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$ y $L = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$, entonces puesto que $a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1}$ y como por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tenemos

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = L - M$$

de donde se recibe que $L = M$ y así ambas sucesiones $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a L. Pero es fácil mostrar $(ver\,ejercicio\,19\,de\,\S 1$) que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L y por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente a L, con lo cual demostramos el resultado.

□

Nótese que en la prueba se demuestra que $s_{2n-1} \geq L$ y $s_{2n} \leq L$, por lo tanto $0 \leq s_{2n} - L \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n}$, de donde , $|s_{2n-1} - L| \leq a_{2n}$.
Análogamente $0 \leq L - s_{2n} \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, así que $|s_{2n} - L| \leq a_{2n+1}$. Esto es, si k es par ó impar tenemos demostrado que $|s_k - L| \leq a_{k+1}$, Tenemos así el siguiente corolario, el cual nos facilita estimar la suma de este género de sucesiones alternadas convergentes.

Corolario. *Si la serie alternada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *satisface las hipótesis del teorema 7 y cuando converge a algún* $L \in \mathbb{R}$ *entonces* $|s_k - L| \leq a_{k+1}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$.

Así la diferencia entre la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ y cualquiera suma parcial no será más grande que la magnitud del primer término no incluido en la suma parcial.

Ilustremos ahora con un ejemplo. Vimos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, sin embargo, puesto que $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ es convergente. Esto es para algún $L \in \mathbb{R}$ tenemos

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=L.$$

Sin duda, no conocemos que es L, pero usando el corolario podemos estimarlo, así para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|\{1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}-L| \leq \frac{1}{n+1}$$

si tomamos $n=9$ esto nos brinda

$$|0.7456-L| \leq \tfrac{1}{10} \Leftrightarrow 0.6456 \leq L \leq 0.8456$$

Continuando se puede demostrar que $L = log2 = 0.6932$.

□

Si $0 < x < 1$, tenemos que la serie $1-x+x^2-x^3+-\cdots$ converge , pues por el teorema 4 se tiene que

$$1-x+x^2-x^3+-\cdots=\frac{1}{1+x} \quad (0<x<1)$$

Como un ejemplo final tenemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+-\cdots$$

es convergente. Si $L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, entonces

$$|(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}-\tfrac{1}{5!})-L| \leq \tfrac{1}{6!}$$

De esto concluimos que $|L-0.3666| \leq 0.0014$ (Por un cálculo elemental podríamos llegar a que $L=e^{-1}=0.3679\cdots$).

2.4. Convergencia condicional y convergencia absoluta.

Vimos en el numeral anterior que las series

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\cdots \text{ y } 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots$$

son ambas convergentes. Sin embargo estas dos series difieren en el siguiente sentido: Si tomamos el valor absoluto a cada uno de los términos de la primera serie obtenemos

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots$$

la cual es convergente; mientras que si tomamos el valor absoluto a todos los términos de la segunda serie obtenemos

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots$$

la cual es la serie armónica de quien ya sabemos que es divergente. Esto nos conduce a la siguiente definición, la cual establece una división entre las series convergente en dos clases.

Definición: *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de números reales*

(a) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, decimos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(b) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge pero* $\sum_{n=1}^{\infty} /a_n/$ *es divergente, decimos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es condicionalmente convergente.*

Así la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ es absolutamente convergente mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente.

Debemos justificar el uso de la palabra "convergente" en la frase "absolutamente convergente". Esto se da en el siguiente teorema.

Teorema 8. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

Demostración: Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Probemos que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Basta mostrar que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge donde $t_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, luego $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_m - t_n| < \epsilon \ \ (m, n \geq N).$$

Pero si suponemos $m > n$ recibimos

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| = |t_m - t_n|$$

De donde tenemos

$$|s_m - s_n| < \epsilon \ \ (m, n \geq N)$$

Esto prueba que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, lo cual deseabamos mostrar.

□

Si separamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en la serie de términos positivos a_n y los términos negativos podemos mostrar una importante distinción entre series absolutamente convergente y series condicionalmente convergentes.

Más exactamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números reales, sea

$$p_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \ \ a_n > 0 \\ 0 & \text{si} \ \ a_n \leq 0 \end{cases}$$

[Así, para la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, $p_1 = 1, p_3 = \frac{1}{3}$, $p_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$, mientras que $p_2 = p_4 = \cdots = 0$]

Análogamente, sea

$$q_n = \begin{cases} a_n & \text{si } \; a_n \leq 0, \\ 0 & \text{si } \; a_n > 0. \end{cases}$$

Los p_n son términos positivos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (junto con algunos ceros) mientras que q_n son términos negativos. Es fácil ver que

$$p_n = \text{max.}\{a_n, 0\}\,, \qquad q_n = \text{min.}\{a_n, 0\}$$

y por lo tanto

$$2p_n = a_n + |a_n| \;\; \text{y} \quad 2q_n = a_n - |a_n|$$

También

$$a_n = p_n + q_n(= \tfrac{1}{2}(2p_n + 2q_n) = \tfrac{1}{2}(a_n + |a_n| + a_n - |a| \;)$$

No es ahora difícil probar el siguiente resultado interesante.

Teorema 9. (a) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente entonces ambas series* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *convergen . Sin embargo*

(b) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge condicionalmente, entonces ambas series* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *son divergentes.*

Demostración : (a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ son ambas convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ también es convergente. Así como $2p_n = a_n + |a_n|$ se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} 2p_n$ es convergente y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}_n$ es convergente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ puede mostrarse análogamente que es convergente.

(b) Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente, tenemos además que $|a_n| = 2p_n - a_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge, entonces tendríamos que $\sum_{n=1}^{\infty} (2p_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergería, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ es divergente. Análogamente se muestra la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$.

□

De donde, puesto que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \; - \cdots$ es condicionalmente convergente , entonces se sigue que $1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \cdots$ diverge y por lo tanto que $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ es divergente.

2.5. Criterios para convergencia absoluta.

Definición: *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de números reales . Se dirá que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es dominada por* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *si existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_n| \leq |b_n| \quad (\forall n \geq N)\ .$$

(Esto es , $|a_n| \leq |b_n|$ *excepto para un número finito de valores de* n*) En este caso escribimos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ejemplos:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ puesto que

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow 2n+1 < n^2 \text{ para } n \geq 3$$

2) $100 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \ll 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

Nota. Que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no implica necesariamente que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Teorema 10. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es dominada por* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *donde* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge absolutamente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también converge absolutamente. Simbólicamente tenemos*

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} /b_n| < \infty$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

***Demostración* :** Sea $M = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Tenemos $|a_n| \leq |b_n|$ para todo n ≥ N. Puesto que

$s_n \leq |a_1| + |a_n| + \cdots + |a_N| + |b_{N+1}| + |b_{N+2}| + \cdots + |b_n| \ \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + M$

Así las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ son acotadas por arriba, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

□

Al teorema 10 se le conoce como **criterio de comparación** para la convergencia absoluta.

Se sigue inmediatamente que para cualquier $x \in (-1.1)$ la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ es absolutamente convergente, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ll \sum_{n=1}^{\infty} |x^n|$ y la serie de la derecha converge abolutamente.

Enfatizamos que el criterio de comparación es verdadero solamente para convergencia absoluta. El siguiente resultado es facilmente deducible.

Teorema 11. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *esta dominada por* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} /a_n/ = \infty$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty$ *(Esto es ,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente).*

Ejemplo: Considere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$. Esta serie domina a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$, la cual es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$ es divergente $\left(\frac{1}{3n} < \frac{1}{2n+5}\right.$ para $n > 5)$

Teorema 12. (a) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge absolutamente y si* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|}$ *existe entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(b) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es divergente y* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|}$ *existe , entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *es divergente.*

Demostración **:** a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|}$ existe entonces $\left\{\frac{|a_n|}{|b_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada . Por lo tanto para algún $M > 0$,

$$|a_n| \leq M|b_n| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Esto muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es dominada por la serie convergente absolutamente $\sum_{n=1}^{\infty} Mb_n$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

b) Como en la prueba de (a) tenemos $|a_n| \leq M|b_n|$ así que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ domina a $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{M})|a_n|$ la cual diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty$.

□

Como ejemplo tomemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2-4n+7}$ y comparémosla con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ entonces aquí $b_n = \frac{2n}{n^2-4n+7}$, $a_n = \frac{1}{n}$ tenemos entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+7}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2-4n+7}$ es divergente.

El siguiente resultado, es llamado **criterio de la razón** y es muy útil en el tratamiento específico de las series de potencias.

Teorema 13. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de números reales y sean*

$$a = \lim_{n\to\infty} inf|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}|, \qquad A = \lim_{n\to\infty} sup|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}| \qquad (\textit{así que } a \leq A)$$

Entonces

(a) *Si* $A < 1,$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente*

(b) *Si* $a > 1,$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente*

(c) *Si* $a \leq 1 \leq A,$ *entonces el criterio falla* (*no es consistente*).

Demostración **:** (a) Si $A < 1$ escójase B tal que $A < B < 1.$ Entonces $B = A + \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq B \quad (\forall n \geq N)$$

entonces

$$\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \leq B, \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right| \leq B, \text{ y así } \left|\frac{a_{N+2}}{a_N}\right| = \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right|\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \leq B^2$$

Para cada $k \geq 0$ en forma análoga tenemos

$$\left|\frac{a_{N+2}}{a_N}\right| \leq \left|\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}\right|\cdots\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \leq B^k$$

Así $|a_{N+k}| \leq |a_N|B^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots).$

Pero $\sum_{k=0}^{\infty} |a_N| \cdot B^k$ converge puesto que $0 < B < 1.$Así por el criterio de comparación se sigue que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}|$ converge. Esto es $|a_N| + |a_{N+1}| + \cdots$ converge. Se sigue facilmente que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$ Esto prueba (a).

(b) Si $a > 1,$ entonces por el teorema 22 de §1 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ para todo $n \geq N$ (para algún $N \in \mathbb{N}$). Pero entonces $|a_N| < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \cdots,$ y así ciertamente la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge hacia 0, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) Ilustremos considerando primero $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$ Puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ se sigue que $a = 1 = A.$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. Ahora tomemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1$$

y aquí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Vemos inmediatamente que si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe (y es igual digamos a L), entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge si $L<1$ y diverge si $L>1$, mientras que si $L=1$ no podemos concluir nada.

Ejemplo: Consideremos $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$, aquí $a_n=\frac{n^n}{n!}$, así que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=(1+\tfrac{1}{n})^n$$

Pero $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>2$, y así $a=e=A$. En particular $a>2$ así que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ es divergente. Este cálculo muestra que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ tiene $A=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}<1$ por lo tanto se sigue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ es convergente.

Teorema 14. *Si el*

$$\lim_{n\to\infty}\text{sup.}\sqrt[n]{|a_n|}=A$$

entonces la serie de números reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(a) Es convergente absolutamente si $A<1$,

(b) Es divergente si $A>1$ *(Esto incluye el caso* $\lim\limits_{n\to\infty}\text{sup.}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$*)*

(c) Si $A=1$ *el criterio no es concluyente.*

***Demostración*:** Si $A<1$ escojamos B tal que $A<B<1$. Entonces por el teorema 22 del §1 existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|}<B$ $(\forall n\geq N)$. Esto implica $|a_n|<B^n$. Así $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es dominada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty}B^n$, la cual es absolutamente convergente, así por el criterio de comparación se sigue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. Esto prueba (a) si $\lim\limits_{n\to\infty}\text{sup.}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, entonces por el teorema 22 del §1 $|a_n|>1$ para infinidad de valores de n, así la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a 0. Por convergencia dominada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente. Esto prueba (b).

Cuando $A=1$ tenemos las dos series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, para las cuales

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\log n}{n}}=e^0=1$$

También se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2=1=1$$

y aquí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Teorema 15. *Supongamos que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Si existe una constante $c > 0$ de manera que*

$$a_n \leq cb_n \quad \forall n.$$

Entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

***Demostración* :** Sean $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ entonces

$s_n \leq ct_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ quedan acotadas por cM y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente luego existe $\lim_{n\to\infty} s_n$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

.

Teorema 16. *Supongamos que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.*

***Demostración* :** Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\frac{a_n}{b_n} - 1| < \frac{1}{2} \ (\forall n > N) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} - 1 < \frac{1}{2} \ (\forall n > N) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$

Por lo tanto

$$b_n < 2a_n \text{ y } a_n < \tfrac{3}{2} b_n \text{ para todo } n \geq N,$$

el resultado se sigue del teorema 15.

□

Fin del segundo bloque

Nota: 1) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, siempre que $c > 0$, puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{cb_n} = 1$ podemos comparar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2) Sin embargo si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ concluimos solamente que la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplo: Estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} log(nsen\frac{1}{n})$.

***Solución* :** Sabemos que $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente. Consideramos $a_n = log(nsen\frac{1}{n})$ y $b_n = -\frac{1}{n^2}$ consideramos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{log(nsen\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}} \underset{t=\frac{1}{n}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{log(\frac{sent}{t})}{-t^2} \underset{L'H\hat{o}pital}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}log(\frac{sent}{t})}{\frac{d}{dt}(-t^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{tcost-sent}{tsent}}{-2t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{tcost-sent}{-2t^2sent} \underset{L'H\hat{o}pital}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{cost-cost-tsent}{-4tsent-2t^2cost} = \lim_{n\to 0}\frac{-sent-tcost}{-4sent-4tcost-4tcost+2t^2sent} =$$

$$\underset{L'H\hat{o}pital}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{-cost-cost+tsent}{-4cost-8cost+8tsent+4tsent+2t^2cost} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$

luego $\sum_{n=1}^{\infty}log(nsen\frac{1}{n})$ es convergente.

2.6. Series cuyos términos forman una sucesión decreciente.

Los criterios de las secciones previas fallan al dar alguna información acerca de la importancia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Esta serie tiene la propiedad especial que sus términos forman una sucesión decreciente . Tales series son frecuentemente tratadas con el criterio de la integral. Sin embargo, puesto que no hemos dicho nada sobre el criterio de la integral usamos otro criterio interesante llamado **criterio condicional de Cauchy.**

Teorema 17. *Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de términos positivos y si $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente.*

***Demostración* :** Tenemos

$$a_1 \leq a_1$$
$$a_2 + a_3 \leq a_2 + a_2 = 2a_2$$
$$a_4 + a_5 + a_7 \leq 4a_4$$

De estas desigualdades se sigue que

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}a_k \leq 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$$

Por lo tanto para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{m}a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$$

Por el criterio de comparación se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge.

□

Teorema 18. *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente de números positivos y si* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Demostración **:** Tenemos

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$
$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8$$

en general

$$a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{2n+1}} \geq 2^n a_{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2}(2^{n+1}a_{2^{n+1}})$$

así que

$$\sum_{k=3}^{2^{n+1}} a_k \geq \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}a_{2^{k+1}} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} 2^k a_{2^k}.$$

□

Corolario: *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *es convergente.*

Demostración **:** Para $a_n = \frac{1}{n^2}$ tenemos

$$\sum_{n-1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} < \infty$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

□

Nota: Que para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tenemos $a_n = \frac{1}{n}$ y así $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$

Así se sigue la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ejemplo: $La\,serie\ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,log\,n}\ es\ divergente.$

Para esto tomamos $a_n = \frac{1}{n\,log\,n}$ y se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n log\, 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{log\, 2}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

la cual es divergente. Se sigue entonces la divergencia de $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,log\,n}$.

Teorema 19. *(Abel) Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente de números reales positivos y si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$

Demostración **:** Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A,$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A = \lim_{n\to\infty} s_{2^n}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2^n} - s_n) = 0$$

Ahora
$$s_{2^n} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \geq a_{2n} + a_{2n} + \cdots + a_{2n}$$
de donde
$$0 \leq n a_{2n} \leq s_{2n} - s_n .$$
Por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty} n a_{2n} = 0$$
y también
$$\lim_{n\to\infty} 2n a_{2n} = 0 \qquad (1)$$
Pero $a_{2n+1} \leq a_{2n}$, de donde
$$(2n+1)\, a_{2n+1} \leq (\tfrac{2n+1}{2n})(2n a_{2n})$$
y por (1) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)\, a_{2n+1} = 0$, de donde el resultado.

□

La serie geométrica y la función zeta son dos de los más grandes resultados de las series por el gran número de aplicaciones en el estudio de la convergencia de series. A continuación damos un criterio dado y demostrado por Cauchy en 1837.

Teorema 20. *(Criterio de la integral) Sea f una función decreciente y definida para todo $x \geq 1$. Para cada $n \geq 1$ tómese*
$$s_n = \sum_{k=}^{n} f(k) \quad y \quad t_n = \int_1^n f(x)\, dx$$
Entonces ambas sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen ó ambas divergen.

Demostración **:** Comparando f con las funciones escalonadas dadas en la figura, obtenemos
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \qquad (1)$$

$$y \qquad \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx \qquad y \qquad \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

↑ f(2) f(n)
0 1 2 ··· n x

↑ f(1) f(n)
0 1 2 ··· n x

ó $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$. Puesto que ambas sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ son monótonas decrecientes, entonces estas desigualdades muestran que ambas sucesiones son acotadas o ambas no son acotadas. Por lo tanto ambas sucesiones convergen ó ambas sucesiones divergen **(vea teorema 7 del No.1.7)**

Ejemplo: $Mostremos\, que\, la\, serie$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $converge\, si\, y\, sólo\, si\, s > 1$.

Esta serie es llamada **FUNCION ZETA** (ó función cita)
Tomando $f(x)=x^{-s}$, tenemos

$$t_n=\int_1^n \frac{1}{x^s}dx=\begin{cases}\frac{n^{1-s}-1}{1-s} & \text{si } s\neq 1\\ \log n & \text{si } s=1\end{cases}$$

Cuando $s>1$ el término $n^{1-s}\to 0$, cuando $n\to\infty$ y por lo tanto $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Por el criterio de la integral, esto implica convergencia de la serie para $s>1$, cuando $s\leq 1$, entonces $t_n\to\infty$ y la serie diverge . En el caso especial cuando $s=1$ se tiene también divergencia y es el caso de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Ejemplo: Estudiar la convergencia de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\,log\,(4n+1)}{n\,(n+1)}$$

1) $\frac{\sqrt{2n-1}\,log(4n+1)}{n(n+1)}\leq\frac{\sqrt{2n}\,log\,(4n+1)}{n(n+1)}\leq\frac{\sqrt{2}log\,(4n+1)}{n^{3/2}}$

2) Comparemos con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}$ la cual converge porque $\frac{5}{4}>1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2}\,log\,(4n+1)}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{5/4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\,log\,(4n+1)}{n^{1/4}}=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to n}\frac{\sqrt{2}\,log\,(4x+1)}{x^{1/4}}=\lim_{\substack{x\to n\\ n\to\infty}}\frac{\sqrt{2}\frac{4}{4x+1}}{\frac{1}{4}x^{-3/4}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to n\\ n\to\infty}}\frac{16\sqrt{2}x^{3/4}}{4x+1}=16\sqrt{2}\lim_{\substack{x\to n\\ n\to\infty}}\frac{\frac{3}{4}x^{-1/4}}{4}=3\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/4}}=0\,.$$

Por el criterio de comparación con el límite se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\,log\,(4n+1)}{n\,(n+1)}$ es convergente.

2.7. Reordenación de series.

Hablando a grosso modo, una reorganización de una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es otra serie $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{b}_n$ cuyos téminos son los mismos como aquellos de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ pero ocurriendo en orden diferente (una definición exacta de reordenación es dada posteriomente en esta sección). Veremos que reorganizando una serie se pueden tener efectos dramáticos por así decirlo. Hemos visto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente para algún $\mathrm{L}\in\mathbb{R}$, $\mathrm{L}\neq 0$. Tenemos

$$L=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots \tag{1}$$

Así

$$\frac{1}{2}L=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

y así claramente

$$\frac{1}{2}L=0+\frac{1}{2}-0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}-0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}-0-\frac{1}{12}+\cdots \tag{2}$$

Si sumamos ahora (1) con (2) obtenemos otra vez

$$\tfrac{3}{2}L =$$
$$(1+0)+(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-0)+(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{-1}{4})+(\tfrac{1}{5}+0)+(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6})+\cdots$$
ó
$$\tfrac{3}{2}L = 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\cdots \qquad (3)$$

La serie en lado derecho de (3) es una reordenación de la serie convergente del lado derecho de (1), pero ellas convergen a sumas diferentes. en verdad, podemos hallar una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converja para algún número real previamente asignado.

Definición: *Sea $N=\{n_i\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números enteros positivos donde cada entero positivo se da, exactamente una vez entre los n_i (Esto es, N es una función uno a uno de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$). Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es una serie de números reales y si $b_i=a_{n_i}\,(i\in\mathbb{N})$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ es llamado* **un reordenamiento** *de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.*

Si $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $B=\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces, la definición nos dice que $A\circ N=B$. Si $N^{-1}=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la función inversa de N, entonces $A=B\circ N^{-1}$ así que $a_i=b_{m_i}$. Esto muestra que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es también una **reordenación** de $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ si $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Hemos deducido el siguiente resultado:

Teorema 21. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ una serie condicionalmente convergente de números reales entonces para cada $x\in\mathbb{R}$ hay una reordenación la cual converge a x.*

Para series absolutamente convergentes la teoría es enteramente diferente. Primero tratamos el caso de series de términos positivos.

Lema: *Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es una serie de números positivos la cual converge a $A\in\mathbb{R}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = A$.*

Demostración **:** Para cada $N\in\mathbb{N}$ sea $s_N=b_1+b_2+\cdots+b_N$. Puesto que $b_i=a_{n_i}$ para alguna sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenemos $b_1=a_{n_1},b_2=a_{n_2},\cdots,b_N=a_{n_N}$. Sea $M=max\{n_1,n_2,\cdots,n_N\}$. Entonces ciertamente $s_N\le a_1+a_2+\cdots+a_M\le A$. Así las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergen para algún $B\in\mathbb{R}$. Pero $B=\lim_{N\to\infty}s_N$ y así por convergencia dominada $B\le A$. (Esto es, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ll\sum_{n=1}^{\infty}a_n)$. Pero puesto que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es también una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, el mismo razonamiento con los papeles de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{b}_n$ invertidos demostraríamos que $A \leq B$. Por lo tanto $B = A$ y el teorema queda probado.

□

El resultado anterior claramente se tiene tembién para series de números no positivos. El lema es un caso especial del siguiente teorema.

Teorema 22. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente a A, entonces cualquier reordenación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge absolutamente hacia A.

Demostración **:** Definamos

$$p_n = \begin{cases} a_n \text{ si } a_n > 0 \\ 0 \text{ si } a_n \leq 0 \end{cases}, \text{y}, \quad q_n = \begin{cases} a_n \text{ si } a_n \leq 0 \\ 0 \text{ si } a_n > 0 \end{cases}$$

así que $a_n = p_n + q_n$. Entonces veamos que ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ convergen, pues $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n|$ convergen, así $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + |a_n|]$ converge puesto que $p_n = max(a_n, 0)$ entonces $2p_n = a_n + |a_n|$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2p_n$ es convergente. En forma análoga se puede demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ es convergente. Digamos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = P$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = Q$ (donde $Q \leq 0$), entonces $A = P + Q$. Para alguna $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenemos $b_i = a_{n_i} = p_{n_i} + q_{n_i}$. Además $\sum_{i=1}^{\infty} p_n$ es una **`reordenación`** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ de términos positivos. Así por el lema $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}$ es convergente y $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i} = P$, en forma análoga $\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} = Q$. Puesto que $b_i = p_{n_i} + q_{n_i}$ lo cual implica que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ es convergente y

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i} + \sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} = P + Q = A.$$

Lo que resta es demostrar la convergencia absoluta de $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Pero como $b_i = p_{n_i} + q_{n_i}$ tenemos $|b_i| \leq |p_{n_i}| + |q_{n_i}| = p_{n_i} - q_{n_i}$. Por lo tanto para cualquier $N \in \mathbb{N}$

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_N| \leq \sum_{i=1}^{N} p_{n_i} - \sum_{i=1}^{N} q_{n_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i} - \sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} = P - Q$$

Las sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ son por lo tanto acotadas por $P - Q$ por lo tanto $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ es convergente. Esto prueba el teorema.

□

El teorema 22 nos brinda un resultado para la multiplicación de series. Si formalmente el producto de dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y reagrupando términos con la misma potencia de x, tenemos

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) =$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

Esto es ,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (1)$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Con el propósito de aplicar el teorema 22, es suficiente examinar (1) en el caso $x = 1$. Probaremos que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Bajo la hipótesis de que las dos series de la izquierda convergen absolutamente.

Teorema 23. *Si las series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *son absolutamente convergentes a* A *y* B *respectivamente, entonces* $AB = C$ *donde* $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *y* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Demostración **:** Para $k = 0, 1, 2, \dots$ tenemos

$$|c_k| \leq |a_0 b_k| + |a_1 b_{k-1}| + \cdots + |a_k b_0|.$$

Así, para cada n,

$$|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n| \leq$$
$$\leq |a_0 b_0| + (|a_0 b_1 + a_1 b_0|) + \cdots + (|a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \cdots + |a_n b_0|)$$
$$\leq (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|) + (|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right)$$

La sucesión de sumas parciales de $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ es así acotada superiormente y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

La anterior desigualdad también demuestra la convergencia absoluta de la serie

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_0 b_3 + a_1 b_2 + \cdots \qquad (1)$$

(cuya suma es $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$). Por el teorema 22 de reordenación podemos reordenar los términos de (1) para obtener

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = [a_0 b_0] + [a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1] + [a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2] + \cdots \quad (2)$$

El interior del n-ésimo paréntesis $(n = 1, 2, 3, \dots)$ en la derecha de (2) son todos los productos $a_j b_k$ donde cualquiera j ó k es igual a n y ningún j ó k es más grande que n. Examinaremos las sumas de los términos en cada paréntesis. Si

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n,$$

tenemos

$$a_0 b_0 = A_0 B_0 .$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - a_0 b_0 = A_1 B_1 - A_0 B_0.$$

$$a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 =$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) - (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = A_2 B_2 - A_1 B_1.$$

y en general, para $n \geq 1$ la cantidad en el n-ésimo paréntesis en el lado derecho de (2) es igual a $A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}$. La suma de los n primeros paréntesis en el lado derecho de (2) es por lo tanto

$$[\mathrm{A}_0 B_0] + [A_1 B_1 - A_0 B_0] + \cdots + [A_n B_n - A_{n-1} \mathrm{B}_{n-1}] = A_n B_n$$

lo cual tiende a AB cuando $n \to \infty$. El lado derecho de (2) es así igual a AB y la demostración es ahora completa.

□

Corolario: *Si para algún $x \in \mathbb{R}$ las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ son convergentes absolutamente entonces*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Demostración **:** Sean $A_n = a_n x^n$, $B_n = b_n x^n$. Entonces por el teorema 23 se tiene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \tag{2}$$

donde

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = c_n x^n.$$

Entonces (1) se sigue por lo tanto de (2).

□

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, sea $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $A_0 = 0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_0 b_1 \ \ (A_0 = 0)$$

Teorema 24. *(Criterio de Dirichlet) Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones tales que*

1) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada*

2) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es decreciente y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ *es convergente.*

Demostración **:** Tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} A_nb_n=0$, también

$$\sum_{k=1}^{n-1}|A_k(b_k-b_{k+1})|=\sum_{k=1}^{n-1}|A_k||b_k-b_{k+1}|\le M\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=M(b_1-b_n)<Mb_1$$

por lo tanto la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k-b_{k+1})$ converge absolutamente.

□

Ejemplo: *Demostrar que las siguientes series son absolutamente convergentes*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\,nx}{n} \qquad 2)\sum_{n=1}\frac{cos\,nx}{n} \qquad (x\neq 0)$$

***Solución*:** Veamos que $\{\sum\limits_{k=1}^{n} sen\,kx\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada

$$cos(k+1-\tfrac{1}{2})x-cos(k-\tfrac{1}{2})x=-2sen\,kxsen\tfrac{x}{2}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n}(-2senkxsen\tfrac{x}{2})=-2sen\tfrac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}sen\,kx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[cos(k+1-\tfrac{1}{2})x-cos(k-\tfrac{1}{2})x]=cos(n+1-\tfrac{1}{2})x-cos(1-\tfrac{1}{2})x$$

Lo cual es equivalente a

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}sen\,kx=\frac{cos\frac{1}{2}x-cos(n+\frac{1}{2})x}{2sen\frac{1}{2}x} \quad (\sum_{k=1}^{n}cos\,kx=\frac{sen\frac{1}{2}x-sen(n+\frac{1}{2})x}{2sen\frac{1}{2}x}).$$

Así las sumas parciales son **acotadas** . Por el criterio de Dirichlet se sigue la convergencia de 1) y 2)

Teorema 24. *(Criterio de Abel) Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones tales que* 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *es convergente y* 2) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es decreciente,* $b_n\ge 0$*.*

Entonces se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ *es convergente.*

Demostración **:** Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a$ y $b_n\to b\,(n\to\infty)$, tenemos $A_nb_n\to ab$ $(n\to\infty)$. La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k(b_k-b_{k+1})$ converge absolutamente ya que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y se está en las hipótesis de criterio de Dirichlet.

□

2.8. Ejercicios

1. Probar que si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ converge a s, entonces $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ converge hacia $s - a_1$.
2. Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)}\right]$ converge. [$Ayuda:\ Escriba\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1}$ $y\ calcule\ las\ sumas\ parciales\ de\ la\ serie$]
3. Pruebe que la serie $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots$ es convergente si y sólo si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente . La serie así obtenida es llamada **serie telescópica** y se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$.
4. ¿Para que valores de x la serie $(1-x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots$ es convergente ?
5. ¿ Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} log(1 + \frac{1}{n})$ convergente o divergente ? ¿cual es la razón de su afirmación?.
6. Pruebe que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ la serie
$$a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \cdots$$
diverge a menos que $a = b = 0$.
7. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \epsilon\,(m, n \geq N)$. Esta propiedad es conocida como **condición de Cauchy para series**
8. Pruebe que si $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ converge a A, entonces
$$\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2) + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_3 + a_4) + \cdots$$
es converge. ¿ Cual es el valor de la suma de la segunda serie ?
9. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{n+2}\right]$ converge o diverge? ¿$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10^{10}(n+2)}$ converge o diverge ?
10. Mostrar que si la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ converge a L , entonces también $a_1 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + 0 + \cdots$ converge a L. Más generalmente mostrar que cualquier número de términos con 0 pueden ser insertados en una serie convergente sin alterar su convergencia o suma.
11. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es divergente.
12. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Sea $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ cualquier subsucesión de la sucesión natural. Finalmente sea
$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}$$

$$\vdots$$
$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Probar que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{b}_n$ converge a la misma suma que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

13. Dar un ejemplo de una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots$ converge pero $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ diverja. (Esto demuestra que removiendo parentesis puede causarse dificultades).

14. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números positivos y si $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$es una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, probar que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ converge.

15. Probar que $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots$ es convergente.

16. Si $0 \leq a_n \leq 1$ $(n \geq 0)$ y si $0 < x < 1$, entonces probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ convege y que su suma no es más grande que $\frac{1}{1-x}$.

17. ¿ Para que valores de p la serie $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$converge?

18. Si x no es un número entero, probar que $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \cdots$ es convergente.

19. Probar que

(a) $2 - 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{4}} + \cdots$ es divergente

(b) $(1-2) - (1 - 2^{\frac{1}{2}}) + (1 - 2^{\frac{1}{3}}) - (1 - 2^{\frac{1}{4}}) + \cdots$ es convergente

20. Mostrar que si $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es divergente (aquí $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ¿Porque no se puede aplicar el teorema de las series alternadas?)

21. Mostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1}$ es divergente.

22. Clasifique como divergente, condicionalmente convergente o absolutamente convergente a cada una de las siguientes series :

(a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$, (b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$, (c) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots$

$(d) 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$

23. ¿Puede una serie de números no negativos converger condicionalmente?

24. Probar que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, entonces $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

25. Pruebe si es verdad o de un contra-ejemplo en caso de ser falso: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie divergente de téminos positivos, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

26. ¿Cuales de las siguientes series son convergentes?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ $\quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ $\quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4+2^n}$

27. Mostrar que si $|x| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{n}^{10000} x^n$ converge absolutamente.

28. Para cada $x > 0$ probar que las series $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ y $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ convergen absolutamente.

29. (a) ¿El criterio de la razón da alguna información acerca de la serie $(\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{4})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \cdots$?

(b) ¿Es esta serie convergente ?

30. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, y si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

31. ¿Para que valores de x la serie $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ converge?

32. ¿Para que valores de x la serie $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ converge?

33. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ y si cada $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, probar que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ $(Ayuda:\ mostrar\, que\, |b_n| \leq |\frac{b_1}{a_1}||a_n|\,)$

34. Examinar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (3 - e)(3 - e^{\frac{1}{2}})(3 - e^{\frac{1}{3}})\cdots(3 - e^{\frac{1}{n}})$

35. Use el criterio de la raíz en las siguientes series y que puede concluir en

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad (b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(logn)^n}$ $\quad (c)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{2n}}{e^n}$

36. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

37. ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge.?

38. ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[n(logn)^x]}$ converge ?

39. Pruebe que para cada valor real x la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(logn)^x}$ diverge

40. (a)Si los términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son positivos y forman una sucesión decreciente, probar que $\lim_{n\to\infty} 2^n a_{2^n} = 0$

(b) Demostrar que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de números positivos y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$

Cada una de las siguientes series son de tipo **telescópica** $(obsérvalo\ en\, cada\, caso)$, en cada caso pruebe que la serie converge y tienen la suma indicada

41.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$ 42.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$ 43.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$

44.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ 45.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ 46.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

47.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}$ 48.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1$

49.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$ 50.$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{log[(1+\frac{1}{n})^n(1+n)]}{(logn^n)[log(n+1)^{n+1}]} = log_2\sqrt{e}$

51. Hemos demostrado en las notas de clase que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$

Haciendo uso de esta afirmación muestre que

$(a)\, 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$ si $|x| < 1$

$(b)\, x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}$ si $|x| < 1$

$(c) 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}$ si $|x| < 1$

(d)$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}$ si $|x| < 1$

(e) $x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2}$ si $|x| < 1$

$(f) 1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2}$ si $|x| < 1$

$(g) 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$

$(h) x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = log(1+x)$ si $|x| < 1$

$(i) x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = arctang\, x$ si $|x| < 1$

52 .Usando el ejercicio 45 demuestre la igualdad de cada uno de las siguientes series, todas válidas para $|x| < 1$

$(a)\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(b)\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ $(c)\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x+x}{(1-x)^4}$

$(d)\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$ $(e)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = log\frac{1}{1-x}$ $(f)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}log\frac{1+x}{1-x}$

$(g)\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$

$(i)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$

53..Dado que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ para todo x, hallar la suma de las siguientes series, suponiendo que es posible operar con series infinitas como cuando ellas son sumas finitas.

$(a)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$ $(b)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ $(c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n!}$ $(d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$

Usando criterios de comparación y adecuadas acotaciones estudie la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes series :

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$ 55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$ 56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|sen\,nx|}{n^2}$ 59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$ 61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$ 62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3-1}$ 64. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^s}$ 65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{10^n}$, $|a_n|<10$

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$ 67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2(\frac{n\pi}{3})}{2^n}$ 68. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\,(\log\log n)^2}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$ 70. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 71. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$

Usando los criterios de la razón y de la raíz estudie la convergencia de las siguientes series

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$ 77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2n}}$ 78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{n}}}$ 79. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$

80. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ 81. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-e^{-n^2})$ 82. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1000)^n}{n!}$ 83. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

84. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 85. $\sum_{n=1}^{\infty}r^n|sen\,nx|$, $r>0$

§3. SUCESIONES DE FUNCIONES.

Estamos interesados en funciones definidas mediante ecuaciones de la forma

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots$$

Donde $f_n(x)$ es una función, como por ejemplo $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. En tal situación $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ será cierta sucesión de funciones; la cual para cada x obtenemos una sucesión de números $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $f(x)$ es la suma de esta sucesión. Para analizar tales funciones hace falta ciertamente recordar que cada suma

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

es por definición, el límite de la sucesión

$$f_1(x),\ f_1(x) + f_2(x),\ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \ldots$$

Si definimos una nueva sucesión de funciones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante

$$s_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

entonces podemos expresar más sucintamente este hecho escribiendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

Por algún tiempo nos concentramos, por lo tanto, en funciones definidas como

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

en lugar de funciones dadas como sumas infinitas.

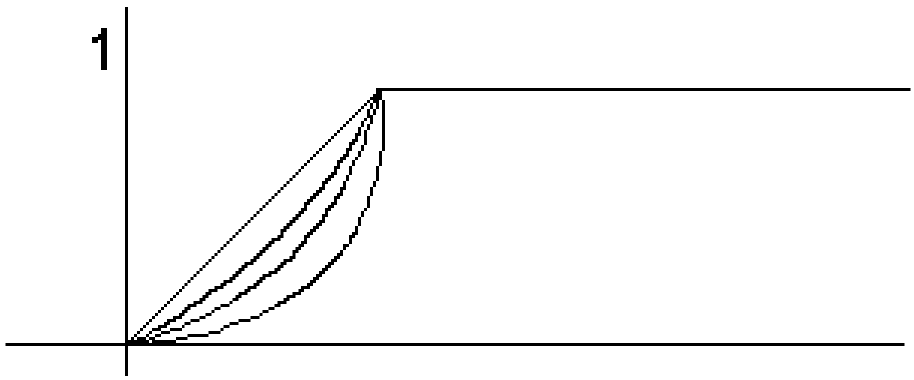


figura 1

Todos los resultados acerca de tales funciones pueden resumirse muy fácilmente: nada de lo que era de esperar que se cumpliera, se cumple en realidad; disponemos por el contrario, de una espléndida colección de contraejemplos. El primero de éstos indica que aún siendo continua cada f_n, puede no serlo la función límite f. Contrariamente a lo que se podría esperar las funciones f_n serán muy sencillas. La figura 1 muestra las gráficas de las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1\ , & x \geq 1 \end{cases}$$

Estas funciones son continuas, pero la función límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua; en efecto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \leq x \leq 1 \\ 1\ , & x \geq 1 \end{cases}$$

Otro ejemplo de este mismo fenómeno se ilustra en la figura 2 en donde las funciones f_n estan definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\frac{1}{n} \\ nx\ , & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1\ , & \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

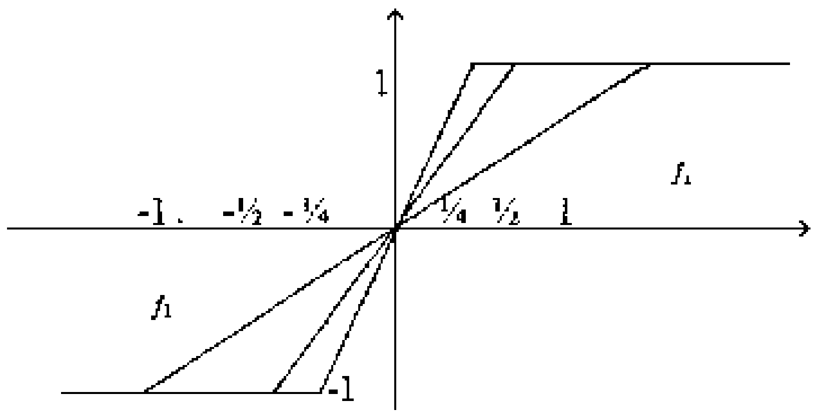


figura.2

En este caso, si $x < 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente (es decir, para n suficientemente grande) igual a -1 y si $x < 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente 1, mientras que $f_n(0) = 0$ para todo n. Así que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1\ , & x < 0 \\ 0\ , & x = 0 \\ 1\ , & x > 0 \end{cases}$$

de modo que, una vez más la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua.

Redondeando el esquema en los ejemplos anteriores es incluso posible construir una sucesión de funciones **derivables** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ para las cuales la función $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ no es continua. Tal sucesión es fácil de definir explícitamente:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1\ , & x \leq 0 \\ sen(\frac{n\pi x}{2}), & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1\ , & \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

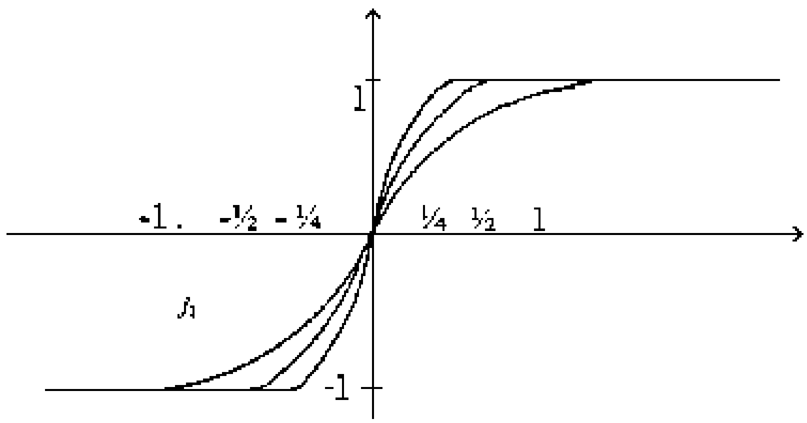


figura.3.

estas funciones son derivables (figura 3), pero todavía tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \; = \begin{cases} -1, \; x<0 \\ \;\; 0\,, \; x=1 \\ \;\; 1\,, \; x>0 \end{cases}$$

La continuidad y derivabilidad no son, además, las únicas propiedades para las cuales se presentan problemas. Otra es ilustrada por la sucesión $\{f_n\}$ indicada en la grafica 4; sobre el intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ la gráfica de f_n forma un triángulo isósceles de altura n, mientras que $f_n(x)=0$ para $x \geq \frac{1}{n}$. Estas funciones pueden definirse explícitamente como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x \;, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n-2n^2x, & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \;\; 0 \quad , & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

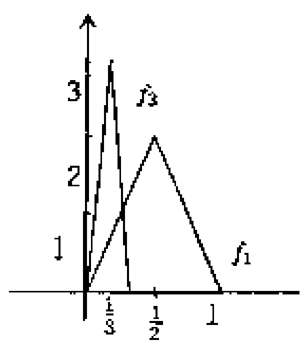


figura 4

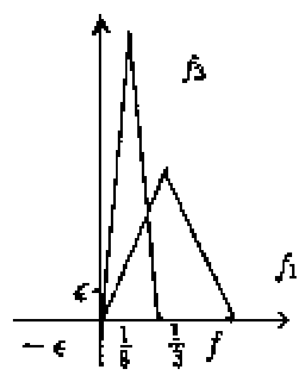


figura 5

Al variar esta sucesión de manera tan errática en la proximidad de 0, nuestros instintos matemáticos primitivos podrían sugerirnos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no siempre existe. No obstante este límile existe para todo x, y la función $f(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ es incluso continua. Efectivamente, si $x>0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente

0, de modo que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; además , $f_n(0) = 0$ para todo n, de modo que tenemos ciertamente $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. En otras palabras $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, para todo x . Por otra parte, la integral revela rápidamente el comportamiento extraño de esta sucesión: tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \quad \text{pero} \quad \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

Esta sucesión particular se comporta de manera que nunca hubiésemos podido imaginar cuando empezamos a considerar funciones definidas por límite. Si bien es verdad que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para cada } x \text{ en } [0,1]$$

Las gráficas de las funciones f_n no se « **acercan** » a la gráfica de f en el sentido de estar próximas a ella; si, como es la gráfica 5, dibujamos una banda alrededor de f de anchura total 2ϵ (dando una anchura de ϵ por encima y por debajo) entonces las gráficas de f_n no quedan completamente dentro de esta banda , por grande que sea n. Por esto, para cada x existe algún N tal que el punto $(x, f_n(x))$ queda dentro de esta banda para $n > N$ esta afirmación equivale al hecho de que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ .Pero hace falta elegir unos N cada vez más grandes a medida que elegimos los x más próximos a 0, **y no habrá ningún N que de resultado para todos los x a la vez.**

La misma situación se presenta en realidad, aunque no tan obviamente, para cada uno de los ejemplos dados anteriormente. La figura 6 ilustra este punto para la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1 , & x \ge 1 \end{cases}$$

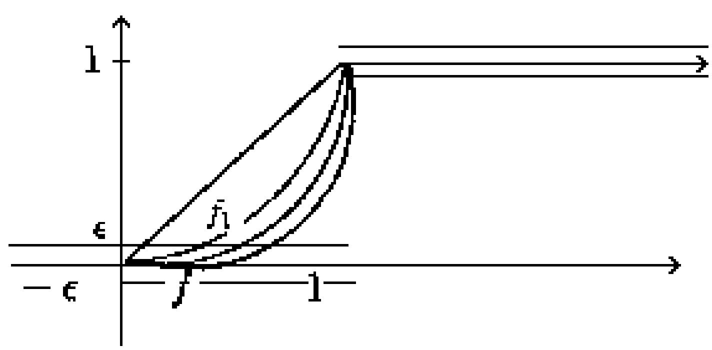


figura 6

Se ha trazado una banda de anchura total 2ϵ a lo largo de la gráfica de $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Si $\epsilon < \frac{1}{2}$, esta banda se compone de dos partes, las cuales no contienen ningún punto con segunda coordenada igual a $\frac{1}{2}$; puesto que cada una de las funciones f_n toma el valor $\frac{1}{2}$, la gráfica de cada f_n deja de estar dentro de esta banda. Una vez más, para cada punto x

existe algún N tal que $(x, f_n(x))$ quede dentro de esta banda para $n > N$; **pero no es posible elegir un N que dé resultado a la vez para todos los x.**
Es fácil comprobar que la misma situación exactamente se presenta para cada uno de los demás ejemplos. En cada caso tenemos una función f y una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, definidas todas sobre algún conjunto A, tales que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in A$$

Esto significa que

$\forall\epsilon > 0$ y $\forall\, x \in A$, existe algún N tal que si $n > N$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Pero en cada caso deben elegirse unos N para distintos distintos $x \in a$ y no se cumple que

«$\forall\epsilon > 0$ existe algún N tal que $\forall x \in A$, si $n > N$, entonces $|f(x(- f_n(x)| < \epsilon$ »

Aunque esta condición difiere solamente de la primera en un pequeño desplazamiento de la frase « **para todo $x \in A$**», tiene un significado completamente distinto. Si una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfece esta segunda condición entonces las gráficas de los f_n quedan eventualmente próximas a la gráfica de f, según queda ilustrado en la figura 7.

Definición : *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas sobre* A, *y sea* f *una función también definida sobre* A. *Entonces* f *recibe el nombre de límite uniforme de* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sobre* A *si dado* $\epsilon > 0$ *existe algún* N *tal que*

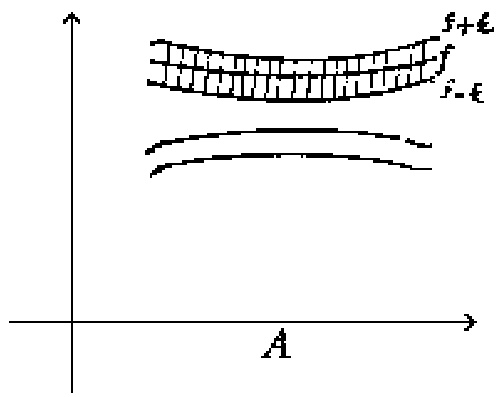


figura 7

para todo $x \in A$ *si* $n > N$, *entonces* $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Decimos también que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$**converge uniformemente hacia** f **sobre** A, o que f_n **tiende hacia** f **uniformente sobre** A y notaremos $f_n \to f$ **uniformemente** sobre A.
Como contraste con esta definición, si solamente sabemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \in A$$

entonces decimos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$**converge puntualmente hacia** f **sobre** A.
Evidentemente, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual (pero no recíprocamente).
No es difícil reunir evidencia acerca de la utilización de la convergencia uniforme . Las integrales representan un tema particularmente fácil: por la gráfica 7 resulta casi evidente

que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f entonces la integral de f_n puede hacerse tan próxima como se quiera a la integral de f. Expresado con más precisión tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1. *Supóngase que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones integrables sobre un intervalo* $[a,b]$ *y que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformente sobre* $[a,b]$ *hacia una función* f *que es integrable sobre* $[a,b]$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, existe algún N tal que para todo $n > N$ tenemos

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b].$$

Así pues si $n > N$ tenemos

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| = |\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx$$
$$\leq \int_a^b \epsilon dx = \epsilon(b-a)$$

Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

□

Solamente algo más difícil resulta el tratamiento de la continuidad el cual supone un «**razonamiento** $\frac{\epsilon}{2}$», estimación en tres pasos de $|f(x) - f(x+h)|$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformente hacia f, entonces existe n tal que

$$(1)\ |f(x) - f_n(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$
$$(2)\ |f(x+h) - f_n(x+h)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

Además, al ser f_n continua, para h suficientemente pequeño tenemos

$$(3)\ |f_n(x) - f_n(x+h)| < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Se seguirá de (1), (2), y (3) que $|f(x) - f(x+h)| < \epsilon$. Para obtener (3), debemos restringir, sin embargo, el tamaño de $|h|$ en un modo que no puede predecirse hasta una vez elegido n; es por tanto completamente esencial que exista algún n fijo que haga que se cumpla (2), por pequeño que sea $|h|$; es precisamente en este caso donde entra en la demostración la convergencia uniforme.

Teorema 2. *Supóngase que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones contínuas sobre* $[a,b]$ *y que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente hacia* f *sobre* $[a,b]$. *Entonces* f *es también una función continua sobre* $[a,b]$.

Demostración: Para todo $x \in [a,b]$ debemos demostrar que f es continua en x. Tratemos solamente el caso en el cual x está en (a,b); los casos $x = a$ y $x = b$ requieren las sencillas modificaciones usuales.

Sea $\epsilon > 0$. Al converger $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformemente hacia f sobre $[a,b]$, existe algún n tal que

$$|f(y) - f_n(y)| < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \forall y \in [a,b].$$

En particular, para todo h tal que $x + h \in [a,b]$, tenemos

$$(1)\quad |f(x) - f_n(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

$$(2) \qquad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

Ahora bien, f_n es continua, de modo que existe algún $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$ tenemos

$$(3)\, |f_n(x) - f_n(x+h)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

Así pues, si $|h| < \delta$, entonces

$|f(x+h) - f(x)| = |f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$

$\leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

Esto demuestra que f es continua en x.

□

Después de los dos notables éxitos ofrecidos por los teoremas 1 y 2 el asunto de la derivabilidad resulta muy decepcionante. Si cada f_n es derivable y si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f, todavía no se cumple necesariamente que f sea derivable. Por ejemplo la figura 8 indica que existe una sucesión de funciones derivables $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente hacia $f(x) = |x|$. Puede aún suceder que f sea derivable pero no sea verdad que

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x).$$

Esto no es en ningún modo sorprendente si tenemos en cuenta que una función suave puede ser aproximada por funciones de oscilación muy rápida.

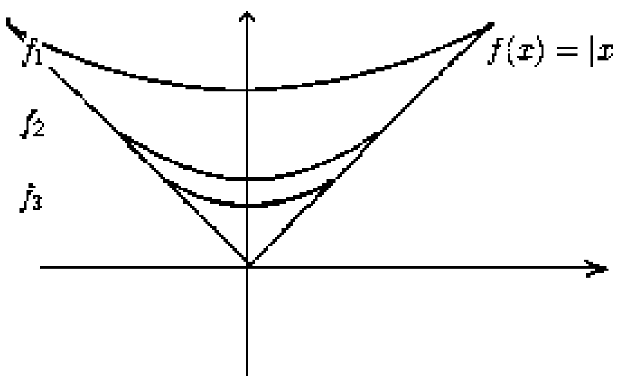


figura 8

Por ejemplo (fig.9) si $f_n(x) = \frac{1}{n} sen(n^2 x)$ entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia la función $f(x) = 0$, pero $f_n'(x) = ncos(n^2 x)$ y $\lim_{n \to \infty} ncos(n^2 x)$ no existe siempre . (por ejemplo existe si $x = 0$)

Fin del tercer bloque

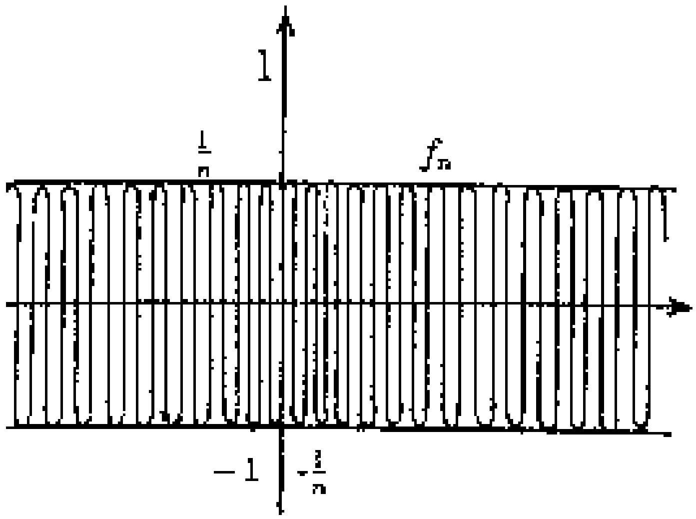


figura 9

A pesar de estos ejemplos, el teorema fundamental del cálculo garantiza prácticamente que se podrá deducir del teorema 1 algún tipo de teorema acerca de derivadas; la hipótesis crucial es que $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente (hacia alguna función continua).

Teorema 3. *Supongamos que cada una de las funciones de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es derivable sobre el intervalo $[a,b]$ y que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia f. Supóngase además que $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente uniformemente sobre $[a,b]$ hacia una función continua g. Entonces f es derivable y $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

Demostración: Si aplicamos el teorema 1 en un intervalo adecuado podemos lograr un buen camino con el fin de tener la veracidad del teorema, con tal fin tomemos un número x tal que $a \leq x \leq b$ y consideremos el intervalo $[a,x]$, se tiene

$$\int_a^x g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ teorema\, fundamental\, del\, cálculo}}{=} \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a))$$
$$= f(x) - f(a)$$

Como g es continua, se tiene que $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

□

Teorema 4. *Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones convergente uniformemente hacia una función f en un conjunto D. Si cada una de las f_n esta acotada en D entonces existe una constante M tal que*

$$|f_n(x)| \leq M \ ,\forall n \in \mathbb{N} \ \text{y} \ \forall x \in D \qquad (1)$$ *y*

además se tiene que f es una función acotada en D.

Si existe M la cual satisfece la condición (1), se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada en D.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ por la hipótesis existe N tal que para todo $n \geq N$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (\forall x \in D)$$

o sea

$$|f_n(x)| < |f(x)| + \epsilon \quad (\forall x \in D) \qquad (2)$$

En particular se tiene

$$|f(x) - f_N(x)| < \epsilon \Leftrightarrow |f\ (x)| < |f_N(x)| + \epsilon$$

Sea M_0 una cota de f_N en D entonces

$$|f(x)| < M_0 + \epsilon \quad (\forall x \in D)$$

o sea que f es acotada en D. De (2) tenemos

$$|f_n(x)| < M_0 + \epsilon + \epsilon = M_0 + 2\epsilon \ \ (\forall x \in D)$$

Sea M_i una cota de $f_i \ (i = 1, 2, 3, \dots, N-1)$ en D, sea

$$M = máximo\{M_1, M_2, \dots, M_{N-1}, M_0 + 3\epsilon\}$$

Se sigue de aquí que M es la cota uniforme de todas las funciones

$$f_i\ (i = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{en} \quad D.$$

□

Ejemplo: Sea $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ una familia de funciones definidas en $[0,1)$. Para cada n, f_n es acotada en $[0,1)$ pues

$$|f_n(x)| = \frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} < n$$

Además $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ en $[0,1)$, como la función límite no es acotada en $[0,1)$, entonces la convergencia no es uniforme.

Teorema 5. *Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones uniformemente convergentes en un conjunto D , entonces se tiene que la sucesión $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también convergente uniformemente en D.*

Demostración: Por hipótesis existen f y g tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ uniformemente en D. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe N (independiente de $x \in D$) tal que $\forall n \geq N$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} \ , \ \ |g_n(x) - g(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} \ \ (\forall x \in D)$$

Entonces

$$|\{f_n(x) + g_n(x)\} - \{f(x) + g(x)\}| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Para el producto de sucesiones de funciones se tiene el siguiente resultado

Teorema 6. *Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones las cuales convergen uniformemente a f y g respectivamente en un conjunto*

D. *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son sucesiones de funciones acotadas entonces se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n = f \cdot g$$

uniformemente en D.

Demostración: Por el teorema 4 las sucesiones son uniformemente acotadas así es posible hallar una constante $M > 0$, para la cual se tenga que

$$|f_n(x)| \leq M,\ |f(x)| \leq M,\ |g_n(x)| \leq M,\ |g(x)| \leq M\ \ \forall n, \forall x \in D$$

Como $f_n \to f$, y $g_n \to g$ uniformemente sobre D, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2M}\ ,\ \ |g_n(x) - g(x)| < \tfrac{\epsilon}{2M}\ (\forall x \in D)$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |g_n(x)(f_n(x) - f(x))| + |f(x)(g_n(x) - g(x))| \\ &\leq |g_n(x)||f_n(x) - f(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)|| \leq M\tfrac{\epsilon}{2M} + \tfrac{\epsilon}{2M}M = \epsilon \end{aligned}$$

o sea $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente sobre D.

□

Definición : *Al conjunto* $\{x \in \mathbb{R}/|x| \leq a\}$ *se le llama* **conjunto compacto**. *En general si* $K \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* K *es cerrado y acotado , entonces a* K *se le llama* **conjunto compacto.**

Teorema 7. *Supongamos que* $f_n \to f$ *uniformemente sobre* D *y que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones uniformemente acotada por* M. *Si* g *es una función continua definida en* $\{x \in \mathbb{R}/|x| \leq M\}$ *entonces se tiene que* $g\circ f_n \to g\circ f$ *uniformemente sobre* D.

Demostración: Como g es uniformemente acotada , entonces g es uniformemente continua, o sea dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|y - z| < \delta,\ |y| \leq M\ ,\ |z| \leq M \text{ implica que } |g(y) - g(z)| < \epsilon$$

Para este δ ya escogido, existe N (independiente de $x \in D$) tal que

$$n \geq N \text{ implica } |f_n(x) - f(x)| < \delta \quad \text{para todo } x \in D$$

luego

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon\ \ \forall x \in D \text{ y } \forall \text{n} \geq N$$

ya que $|f_n(x)| \leq M$ y por el teorema 4 $|f(x)| \leq M$, así se tiene que

$$g \circ f_n \to g \circ f \text{ uniformemente en } D.$$

Lo cual se quería demostrar.

□

Para una sucesión numérica se ha estudiado la condición de Cauchy, en el siguiente resultado se presenta la validez de tal condición para sucesiones de funciones.

Teorema 8. *(Condición de Cauchy) . Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto* D. *Entonces la sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

converge uniformemente en D *si y sólo si dado* $\epsilon > 0$ *existe* N*, independiente de* $x \in D$*, tal que*

$$n > N \text{ implica } |f_n(x) - f_{n+q}(x)| < \epsilon \qquad (1)$$

para todo $x \in D,$ *y para todo* $q = 1, 2, 3, \ldots$

Demostración: α) Si $f_n \to f$ uniformemente sobre D, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$ tenemos:

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in D$$

Como $n + q \geq N$ tenemos también :

$$|f_{n+q}(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in D$$

De las dos desigualdades anteriores se recibe

$$|f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+q}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

β) Supongamos ahora válida la condición (1). La sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición de Cauchy para cada x fijo, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en D, sea f la función límite. De (1) tomando límite cuando $q \to \infty$ se tiene :

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D$$

esto es la convergencia $f_n \to f$ es uniforme sobre D.

□

Ejemplo: Sea $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ en $[0, \infty)$ entonces se tiene

$$f_n(x) - f_k(x) = \frac{x}{nx+1} - \frac{x}{kx+1} = \frac{x^2(k-n)}{(nx+1)(kx+1)}$$

para $k > n$ tenemos :

$$|f_n(x) - f_k(x)| = \frac{x^2(k-n)}{(nx+1)(kx+1)} \leq \frac{x^2(k-n)}{nkx^2} = \frac{k-n}{kn} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n}{k}\right) < \frac{1}{n}$$

Dado $\epsilon > 0$ si escogemos $n > \frac{1}{\epsilon}$ (ó $\frac{1}{N} < \epsilon$), para todo $n \geq N$ y todo $k > n$ se tiene :

$$|f_n(x) - f_k(x)| < \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{N} < \epsilon$$

por lo tanto la sucesión $\{\frac{x}{nx+1}\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición de Cauchy, o sea que la sucesión converge uniformemente.

Para facilitar la resolución de algunos ejercicios es necesario el conocimiento del siguiente teorema el cual enunciamos sin demostración.

Teorema 9. *(Dini). Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones a valor real continuas en un espacio compacto* M *tal que* $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots (x \in M)$. *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge puntualmente en* M *a una función continua* f*, entonces* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente a* f *en* M.

3.2. Ejercicios

1. Sea $\mathrm{f}_n(x)=\frac{sen\, nx}{n}$ $(0\leq x\leq 1)$ ¿Existirá $N\in\mathbb{N}$ tal que $|\mathrm{f}_n(x)-0|<\frac{1}{10}$ $(n\leq N)$ para todo $x\in[0,1]$?
2. Sea $f_n=\frac{x^n}{1+x^n}$ $(0\leq x\leq 1)$. Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en [0,1]. Si $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ $(0\leq x\leq 1)$, ¿existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{4}$ para todo $x\in[0,1]$?
3. Sea χ_n la función característica del intervalo abierto $(0,\frac{1}{n})$ $(0\leq x\leq 1)$
(a) Probar que $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 en $[0,1]$
(b) ¿Existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces $|\chi_n(x)-0|<\frac{1}{2}$ para todo $x\in[0,1]$?
(c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\chi_n(x)dx$
(d) Compare (a) con (c).
($Sea\ A\subset\mathbb{R},\ entonces\ \chi_A\ es\ llamada$ **función característica** $de\ A\ y\ est$á $definida\ as$í :

$$\chi_A=\begin{cases}1\, si\ x\in A\\ 0\, si\ x\notin A\end{cases}\quad)$$

4. Para $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ $(0\leq x\leq 1)$
(a) Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $[0,1]$
(b) Probar que $\{\int_0^1 f_n(x)dx\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\frac{1}{2}$
(c) Compare (a) con (b).
5. Sea $f_n(x)=\frac{x}{n}e^{-\frac{x}{n}}$ $(0\leq x\leq\infty)$.
(a) Pruebe que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $[0,\infty)$.
(b) ¿ Existirá $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, entonces $|f_n(x)-0|<\frac{1}{10}$, para todo $x\in[0,\infty)$?
(c) Si A >0, ¿existirá N tal que $n\geq N$, entonces $|f_n(x)-0|<\frac{1}{10}$, se tenga para todo $x\in[0,A)$?
6. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ son uniformemente convergentes en A, pruebe que $\{f_n+g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A.
7. Sea $g_n(x)=\frac{1}{n}e^{-nx}$ $(0\leq x\leq\infty)$. Probar que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a 0 en $[0,\infty)$.
8. Sea f una función a valor real uniformemente continua en $(-\infty,\infty)$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$f_n(x)=f(x+\tfrac{1}{n})\qquad(-\infty<x<\infty)$$

Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $(-\infty,\infty)$ a f.
9. Sea $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ $(0\leq x\leq 1)$
(a) Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[0,\frac{1}{2}]$
(b) ¿Convergerá $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformemente en $[0,1]$?
10. Sea $f_n(x)=\frac{x}{n}e^{-\frac{x}{n}}$ $(0\leq x<\infty)$
(a) ¿Convergerá $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformemente a 0 en $[0,\infty)$?

(b) ¿Convergerá $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformemente a 0 en $[0, 500]$?
11. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones a valor real la cual converge en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

Probar que $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a, b]$.
12. Sea $f_n(x) = \frac{x^n}{n} \quad (0 \leq x \leq 1)$
(a) Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$converge uniformemente a 0 en [0,1]
(b) ¿Convergerá $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ a cero en [0,1] ?
13. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en [0,1] la cual converge uniformemente.
(a) Probar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M \ (n \in \mathbb{N};\ 0 \leq x \leq 1)$
(b) ¿Será el resultado de la parte (a) verdadero si la convergencia uniforme es reemplazada por convergencia puntual ?
14. Examinemos $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ para $0 \leq x \leq \infty$, donde

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en $[0, \infty)$.
15. Sea g una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones la cual converge uniformente en $[a, b]$ a f . Probar que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f_n g)(x)dx = \int_a^b (fg)(x)dx$$

16. Sea $f_n(x) = nx(1-x^2)^n \ (0 \leq x \leq 1)$. Use el resultado del ejercicio 4, para probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en [0,1], sin embargo converge puntualmente.
17. Sea $f_n(x) = \frac{sen\, nx}{n}$ $(0 \leq x \leq 1)$. Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a 0 en [0,1], pero que $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ no converge puntualmente a 0 en [0,1].
18. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$una sucesión de funciones en $[a, b]$ tal que $f_n'(x)$ existe para cada $x \in$ [a,b] $(n \in \mathbb{N}$ y
(a) $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para algún $x_0 \in [a, b]$
(b) $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a, b]$
Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a, b]$.
19. Sea $f_n(x) = x(1 + \frac{1}{n}),\ x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\, x = 0\,, \text{ó}, \ x\, es\, irracional \\ b + \frac{1}{n} & si\, x \in \mathbb{Q}\ (x = \frac{b}{a} \quad a > 0) \end{cases}$$

(a) Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente en cualquier intervalo acotado.
(b) Demostrar que $\{f_n \cdot g_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformente en ningún intervalo.
20. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$una sucesión de funciones monótonas que tienden a una función f puntualmente en $[a, b]$, demostrar que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$.
21. Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $c > 0$, demostrar que $(c_n)^x \rightarrow c^x$ uniformemente en $[-M.M]$.

22. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones monótonas que tiende a f uniformemente en $[a,b]$, demostrar que f es monótona.
23. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en D. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en D, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ donde $x_n \rightarrow x\ (n\rightarrow\infty),\ x_n, x \in D$.
24. Consideremos $f_n = \frac{x}{1+nx^2}$ si $x \in \mathbb{R},\ n = 1,2,3,\ldots$ Encontrar la función límite f de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la función límite de la sucesión $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$
(a) Demostrar que $f'(x)$ existe para todo x pero $f'(0) \neq g(0)$. ¿Para qué valores de x es $f'(x) = g(x)$?
(b) ¿ En qué subintervalo de $\mathbb{R}$, $f_n \rightarrow f$ uniformemente ?
(c) ¿ En qué subintervalo de $\mathbb{R}$, $f_n' \rightarrow g$ uniformemente ?
25. Sea $f_n(x) = (\frac{1}{n})e^{-n^2x^2}$ si $x \in \mathbb{R},\ n = 1,2,3,\ldots$ Demostrar que $f_n \rightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}$, que $f_n' \rightarrow 0$ puntualmente en $\mathbb{R}$, pero que la convergencia de $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ no es uniforme en cualquier intervalo que contenga al origen.
26. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales continuas definidas en [0,1] y supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en [0,1]. Demostrar si es ó no cierta la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

27. Consideremos $f_n = \frac{1}{1+n^2x^2}$ si $0 \leq x \leq 1,\ n = 1,2,3,\ldots.$ Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente pero no uniformemente en [0,1]. ¿ Es posible integrar término a término ?
28. (a) Consideremos que $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, si $0 < x < 1,\ n = 1,2,3,\ldots$ demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente pero no uniformemente en (0,1).
(b) Consideremos $g_n = \frac{x}{nx+1}$ si $0 < x < 1,\ n = 1,2,3,\ldots.$ Demostrar que $g_n \rightarrow 0$ uniformemente en (0,1).

§4. CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES DE SUCESIONES DE FUNCIONES

Justo como en la convergencia de series de números, una serie de funciones es definida por medio de la convergencia de una sucesión de sumas parciales, la convergencia de series de funciones es también definida en términos de una sucesión de sumas parciales de funciones.

Definición: *Sea $f_1, f_2, \ldots$ una familia de funciones a valor real definidas todas sobre un conjunto E. Decimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a la función f en E si las sucesiones de funciones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en E, donde*

$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. *En este caso escribimos* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, *ó*, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall x \in E)$.

Por ejemplo, si $f_n(x) = x^n$ para $-1 < x < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge f en $(-1, 1)$ donde $f(x) = \frac{x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$. Así tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = f(x) \ \ (-1 < x < 1)$$

En seguida definimos convergencia uniforme de serie de funciones.

Definición : *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones definida sobre un conjunto* E, *decimos que* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente a* f *sobre* E *si la sucesión de funciones de sumas parciales* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente hacia* f *donde* $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. *En este caso escribimos* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ *uniformemente ó* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ *uniformemente* $(x \in E)$.

Teorema 1. *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones a valor real definidas sobre un conjunto* E. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente hacia* f *en* E *y si cada una de las funciones* f_n *es continua en el punto* $a \in E$, *entonces* f *es también confinua en* a.

Demostración: La sucesión de funciones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en E, donde $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Ahora cada una de las f_k es continua en a. Entonces como la suma de funciones continuas es continua se sigue que s_n es continua en a. Así por el teorema 2 de §3 se sigue que f es continua en a, lo cual es lo que deseábamos probar.

□

Corolario: *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones a valor real continuas en* E, *y si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente hacia* f *en* E, *entonces* f *es continua en* E.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ converge en [0,1] hacia la función f donde $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ (0 < x ≤ 1). Pero si $0 < x < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n = x\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = x\left[\frac{1}{1-(1-x)}\right] = 1.$$

Ahora, si $f_n(x)=x(1-x)^n$ $(0\le x\le 1)$, entonces f_n es continua en [0,1] y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Puesto que f no es continua en [0,1] el corolario implica que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ no converge uniformemente en [0,1].
Aquí es famoso el criterio para la convergencia uniforme llamado «**criterio** $\boldsymbol{M}$ **de Weierstrass** »

Teorema 2. *(M): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones a valor real sobre un conjunto E. Si existen números positivos $M_1, M_2, \ldots$ con $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \ll \sum_{k=1}^{\infty} M_k$ $(\forall x\in E)$ (Esto es, existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que para cada $k\ge N_1$ tenemos $|f_k(x)|\le M_k$ para todo $x\in E$) entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en E.*

Demostración : Sean $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k,\ t_n = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$. Entonces, para $m>n\ge N_1$

$$|s_m(x)-s_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = t_m - t_n \qquad (1)$$

para todo $x\in E$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y por lo tanto es una sucesión de Cauchy. Así dado $\epsilon>0$, existe $N\ge N_1$ tal que

$$|t_m - t_n| < \epsilon \quad (m,n\ge N).$$

Pero entonces (1) implica

$$|s_m(x)-s_n(x)| < \epsilon \quad (m,n\ge N;\ x\in E).$$

Se sigue que $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente (veáse el teorema 8 del §3). Esto indica que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E y la demostración es ahora completa.
□

Ejemplo: Para todo x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por lo tanto por el teorema (M) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^2}$ converge uniformemente en $-\infty < x < \infty$. Del corolario se sigue que la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^2}$ es una función continua en $(-\infty,\infty)$.
Enfatizamos que en el criterio M de Weierstrass los números M_k deben ser independientes de x. El criterio M nos facilita probar un importante resultado en series de potencias.

Teorema 3 . *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, una sucesión de números reales. Entonces*

(a) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$ *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0,$ *entonces* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente para todo* x *tal que* $|x| < \frac{1}{L}$ *y diverge para* $|x| > \frac{1}{L}$

(c) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty,$ *entonces* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente para* $x = 0$ *y diverge para cualquier otro valor de* x.

Demostración : Usando el teorema 13 del §2 tenemos $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$. Así si $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ entonces para cualquier x, $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot 0 = 0 < 1$ luego tenemos la convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sugún (a). Ahora si $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot L < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L},$ y tenemos la convergencia según se afirma en (b). La parte (c) se obtiene en forma análoga.

□

Corolario: *Si la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge para* $x = x_0$, *entonces es absolutamente convergente para todo* x *tal que* $|x| < |x_0|$.

Demostración : Por los criterios de convergencia dominada se tiene que $|a_n x^n| < |a_n x_0^n|$, luego la convergencia absoluta de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ implica la convergencia absoluta de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (vea teorema 9 del §2).

□

Teorema 4. *Si la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge para* $x = x_0$ (*donde* $x_0 \neq 0$) *entonces la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge uniformemente en* $[-x_1, x_1]$ *donde* x_1 *es cualquier número tal que* $0 < x_1 < |x_0|$.

Demostración : Por el corolario anterior, si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = x_0$, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para cualquier x tal que $|x| < |x_0|$, en particular, si $0 < x_1 < |x_0|$ entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ es absolutamente convergente. Esto es, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n < \infty$. Pero $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ll \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| x_1^n$ $(|x| \leq x_1)$. Por el criterio M de

Weierstrass (con $M_n = |a_n|x_1^n$), la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente para $|x| \leq x_1$, lo cual es lo que deseábamos mostrar.
□

Ejemplo: La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge (a e^x) para todo real x. Estas series no convergen uniformemente en $(-\infty, \infty)$ (Verificarlo!). Pero el teorema 4, sin embargo, nos afirma que para $R > 0$, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformemente en $[-R, R]$.

Torema 5. (Dini) *Sea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones contínuas a valor real positivo en el espacio,* $[-M, M] = K$. *Si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge en* K *a una función continua* f, *entonces* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* K.

Demostración **:** Para $n \in \mathbb{N}$ sea $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Puesto que cada $f_k(x) \geq 0$ para todo $x \in K$, tenemos $s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq s_n(x) \leq \cdots$(para cada $x \in K$). Puesto que $s_n(x)$ es **acotado** y dado que f_k es continua en K, que es compacto, entonces f_k es acotada.. Entonces se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ existe; así tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)\,(x \in K)$. Se puede ahora aplicar el teorema M para concluir que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en K. Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente hacia f en K. Esto completa la demostración.
□

4.2. Integración y diferenciación de series de funciones

Denotaremos con $\mathcal{R}[a,b] = \{f\colon[a,b] \to \mathbb{R} / \int_a^b f(x)dx \text{ existe } \}$.

Teorema 5. *Sea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones de* $\mathcal{R}[a,b]$ *la cual converge uniformemente hacia* f *en* $[a,b]$. *Entonces* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx\,, \Leftrightarrow , \quad \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Demostración **:** Sea $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Entonces $s_n \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en $[a,b]$. Por el teorema 1 del §3 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,,\ \text{entonces}\ f \in \mathcal{R}[a,b] \tag{1}$$

pero por la linealidad de la integral

$$\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx = \lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx \tag{2}$$

El teorema se sigue de (1) y (2).

□

Este teorema dice que una serie uniformemente convergente puede ser integrada término por término. Esto es, si

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots \tag{3}$$

converge uniformemente en $[a, b]$, entonces la integral sobre $[a, b]$ en (3) es igual a

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx + \cdots$$

Ejemplo. Tenemos

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

convergiendo en $-1 < x < 1$. Si $|y| < 1$, entonces la convergencia es uniforme en $[0, y]$ (ó en $[y, 0]$ si $y < 0$). Por el teorema anterior podemos integrar de 0 a y término a término para obtener

$$\int_0^y 1dx - \int_0^y xdx + \int_0^y x^2dx - \cdots = \int_0^y \frac{1}{1+x}dx$$

Así

$$y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots = log(1 + y) \quad (|y| < 1).$$

Teorema 6. *Si* $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ *son funciones cada uno de las cuales tiene derivada en cada punto de* $[a, b]$, *si* f_k' *es continua en* $[a, b]$ *para* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *si* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge hacia* f *en* $[a, b]$ *y si* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ *converge uniformemente, entonces*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

***Demostración*:** Sea $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Entonces $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en $[a, b]$. Puesto que $s_n' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$, la sucesión $\{s_n'\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia g en $[a, b]$ donde $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$. Así $f'(x) = g(x)$ $(a \leq x \leq b)$ lo cual deseabamos mostrar. (vea teorema 3 del §3)

□

Así, bajo las condiciones del teorema anterior, la derivada de

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

es

$$f_1' + f_2' + \cdots + f_n' + \cdots$$

Ejemplo: Sabemos que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

es una serie convergente para $|x| < 1$. Por el teorema 6 si $0 < x < 1$, podemos derivar término a término para obtener

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-a < x < a) \tag{2}$$

probemos que la serie en (2) converge uniformemente en $[-a, a]$. Pero por el criterio de la razón podemos mostrar que la serie (2) converge para $-1 < x < 1$. Por lo tanto por el teorema 4 la serie (2) converge uniformemente en $[-a, a]$ así que nuestra derivada término a término de (1) es justificada. Note que, puesto que a será cualquier número entre 0 y 1, se sigue que

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\tfrac{1}{(1-x)^2}\quad \text{para todo } x \text{ tal que } |x|<1$$

este último ejemplo ilustra el siguiente teorema general en series de potencias.

Teorema 7. *Si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge en* $(-s,s)$ *para algún* $s>0$, *y si*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-s<x<s) \tag{1}$$

entonces $f'(x)$ *existe para* $-s<x<s$ *y*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (-s<x<s) \tag{2}$$

Demostración **:** Por el criterio de la raíz la serie (1) diverge para $|x|>\frac{1}{L}$ donde $L=\lim\limits_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|a_n|}$ (ó será divergente para todo real x si $L=\infty$). Por lo tanto, si $L>0$, $s\le\frac{1}{L}$. Por el criterio de la raíz aplicado a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3}$$

demuestra que (3) será convergente para $|x|<\frac{1}{L}$ si $L>0$, y para todo x si $L=0$. Por lo tanto (3) converge para $|x|<s$. Por el teorema 4, (3) convergerá uniformemente en $[-T,T]$ donde T es cualquier número positivo menor que s . Así la derivación término por término es ahora justificada para $|x|\le T$. Obteniendose que

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (-T\le x\le T). \tag{4}$$

La conclusión de (2) se sigue por tanto de (4) siempre y cuando T sea menor que s.

$\square$

Aplicando el teorema 7 a f' se obtiene

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \qquad (-s<x<s).$$

Y procediendo en esta forma podemos aplicar recurrentemente el teorema 7 para obtener

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Si calculamos en particular cuando $x=0$ de está última expresión se obtiene

$$f^{(k)}(0)=k!a_k.$$

Así obtenemos el siguiente corolario.

Corolario: *Si* $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(-s<x<s)$ *se tiene, para algún* $s>0$ *entonces para cada* $k\in\mathbb{N}$ *existe* $f^{(k)}(x)$ *para* $-s<x<s$ *y*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Además

$$a_k=\tfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k\in\mathbb{N})$$

Esto es, si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (-s<x<s)$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es conocida como la serie de **Maclaurin** para f **.**

Dadas dos sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en un conjunto D , sea

$$\mathrm{s}_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x)\mathrm{g}_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+q}\{s_k(x)-s_{k-1}(x)\}g_k(x)\\ &= \sum_{k=n+1}^{n+q} s_k(x)g_k(x)-\sum_{k=n+1}^{n+q} s_{k-1}(x)g_k(x)\\ &= \sum_{k=n+1}^{n+q} s_k(x)g_k(x)-\sum_{k=n}^{n+q-1} s_k(x)g_{k+1}(x)\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+q} s_k(x)\{g_k(x)-g_{k+1}(x)\}+s_{n+q}(x)g_{n+q+1}(x)-s_n(x)g_{n+1}(x) \qquad (1)$$

Teorema 8 *(Criterio de Dirichlet). Si* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es uniformemente acotada en* D *y* $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente que tiende a cero uniformemente en* D *, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$$

converge uniformemente en D.

Demostración **:** Sea M la cota uniforme de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$en D, como $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente en D, dado $\epsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ tenemos

$$|g_n(x)\,|<\tfrac{\epsilon}{4M} \text{ para todo } x\in D.$$

De la fórmula (1) obtenida arriba se tiene que

$$\begin{aligned}|\sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x)\mathrm{g}_k(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+q}|s_k(x)\{g_k(x)-g_{k+1}(x)\}|+|s_{n+q}(x)g_{n+q+1}(x)|+\\ &\quad +|s_n(x)g_{n+1}(x)\,|\\ &=\sum_{k=n+1}^{n+q}|s_k(x)|\{g_k(x)-g_{k+1}(x)\}|+|s_{n+q}(x)||g_{n+q+1}(x)|+|s_n(x)||g_{n+1}(x)|\\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+q} M\{\,g_k(x)-g_{k+1}(x)\}+M|g_{n+q+1}(x)|+M|g_{n+1}(x)|\\ &= M[g_{n+1}(x)-g_{n+q+1}(x)]+M|g_{n+q+1}(x)|+M|g_{n+1}(x)|\\ &\leq M|g_{n+1}(x)|+M|g_{n+q+1}(x)|+M|g_{n+q+1}(x)|+M|g_{n+1}(x)|\\ &= 2M[|g_{n+1}(x)|+\,|g_{n+q+1}(x)|]<2M(\tfrac{\epsilon}{4M}+\tfrac{\epsilon}{4M})=2M\cdot\tfrac{2\epsilon}{4M}=\epsilon\end{aligned}$$

Por el criterio de Cauchy se sigue el resultado.

□

Teorema 9. *(Criterio de Abel).Sea* $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente de funciones a valor real definidas en un conjunto* D *. Si* $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *es uniformemente acotada y si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente en* D *entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

converge uniformemente en D.

Demostración **:** Sea M una cota uniforme de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente entonces

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to s(x) \text{ uniformemente en } D,$$

o sea dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ tenemos

$$|s_n(x) - s(x)| < \tfrac{\epsilon}{4M} \tag{2}$$

De (1) tenemos

$$|\sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) g_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{n+q} s_k(x)\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + s_{n+q}(x) g_{n+q+1}(x) - s_n(x) g_{n+1}(x)|$$

$$= \ |\sum_{k=n+1}^{n+q} [s_k(x) - s(x)]\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + s(x) \sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} +$$

$$[s_{n+q}(x) - s(x)] g_{n+q+1}(x) - [s_n(x) - s(x)] g_{n+1}(x) + s(x)[g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x)]|$$

$$\leq \ \sum_{k=n+1}^{n+q} |s_k(x) - s(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)| + |s_{n+q}(x) - s(x)||g_{n+q+1}(x)| +$$

$$+ |s_n(x) - s(x)||g_{n+1}(x)| + |s(x)\Big[\sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + \ g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x)\Big]|$$

$$\leq \ \tfrac{\epsilon}{4M} \sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + \tfrac{\epsilon}{4M} |g_{n+q+1}(x)| + \tfrac{\epsilon}{4M} |g_{n+1}(x)| +$$

$$|s(x)\{g_{n+1}(x) - g_{n+q+1}(x)\} + \ g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x)|$$

$$= \tfrac{\epsilon}{4M}(g_{n+1}(x) - g_{n+q+1}(x)) + \tfrac{\epsilon}{4M} |g_{n+q+1}(x)| + \tfrac{\epsilon}{4M} |g_{n+1}(x)|$$

$$\leq \tfrac{\epsilon}{4M} 2M + \tfrac{\epsilon}{4M} M + \tfrac{\epsilon}{4M} M = \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por el criterio de Cauchy se sigue la afirmación deseada.

□

Ejemplo1. Supongamos que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \ \ \forall x \in D, \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ si $g_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en D, demostremos que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g_n(x)$ converge uniformemente en D.

En efecto tomemos $f_n(x) = (-1)^{n-1}$, entonces $s_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \textit{ es impar} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$
aplicando el criterio de Dirichlet la serie converge uniformemente en D.

Ejemplo 2. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente, entonces tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ converge uniformemente en $[0,1]$.
Esto es debido a que si tomamos $x \in [0,1]$ entonces $x^{n+1} \leq x^n \leq 1$ así estamos en la hipótesis del criterio de Abel y nos garantiza que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en [0,1]. Nótese que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es continua en [0,1], luego

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

4.3. Ejercicios

1. Demostrar que cada una de las siguientes series convergen uniformemente en el intervalo indicado:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ $(0 \leq x < \infty)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^n$ $(0 \leq x \leq 10)$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^{\frac{3}{2}}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

2. ¿Será la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ uniformemente convergente en $(-\infty, \infty)$?

3. Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente, pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente para $0 \leq$ x ≤ 1.

4. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(-1 < x < 1)$, pruebe que f es continua en $(-1,1)$.

5. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ es uniformemente convergente en $[0, A]$ para algún $A > 0$. Pruebe que $\lim_{x \to 1} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

6. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathbb{R}$ tal que $|S_n(x)| \leq M$ $(n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R})$ donde $S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales positivos la cual es convergente hacia cero. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

7. Usando el ejercicio 6 demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n}$ converge uniformemente en $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ para algún $\delta > 0$.

8. Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, probar que $\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$

9. Usando el teorema 7 deduzca la igualdad

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Análogamente deduzca la igualdad

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

10. Halle la suma $f(x)$ de la serie

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

Demuestre además que $f'(x) = 2xf(x)$.

11. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ converge absolutamente en $[0,1]$ pero no uniformemente, mientras que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ converge uniformemente en $[0,1]$.

12. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformemente en cualquier intervalo acotado, pero no converge absolutamente para ningún valor de x.

13. Sea $f_n(x) = \frac{sen\, nx}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(i) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para todo x.

(ii) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado que no contenga a los puntos $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

(iii) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ no converge uniformente en $(0,\pi]$.

(iv) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ nunca converge.

14. Sea $f_n(x) = e^{\frac{1}{n} sen\, nx}$ demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)dx = \pi$.

15. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$, si f_n converge uniformemente hacia f, demostrar que $\int_a^x f_n(t)dt \to \int_a^x f(t)dt$ uniformemente en $x \in [a,b]$.

16. (i) Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ converge uniformemente en $[-r, r]$, donde $0 < r < 1$.

(ii) Demostrar que $log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ si $|x| < 1$.

17. Sea $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$, demostrar que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[0,1]$ pero no uniformemente ¿ Es posible integrar término por término esta sucesión ?

18. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ converge uniformemente en todo intervalo finito de $\mathbb{R}$ si $\alpha > \frac{1}{2}$ ¿ La convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$?

19. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})\, sen\,(1 + (\frac{x}{n}))$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

20 Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2})$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0,1]$.

21. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\, nx$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\, nx$ son uniformemente convergentes en $\mathbb{R}$ si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

22. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de términos positivos. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\, nx$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ y recíprocamente.

23. Dada la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Demostrar que la serie de **Dirichlet** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge uniformemente en el semi-intervalo infinito $0 \le s < +\infty$. Utilizando este resultado probar que $\lim_{s\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

24.Demostrar que la serie $\zeta(\text{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge uniformemente en todo semi-intervalo infinito $1+h \le s < +\infty$, siendo $h > 0$. Demostrar que la igualdad $\zeta'(\text{s}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log\, n}{n^s}$ es válida para cada $s > 1$ y obtener una fórmula parecida para la derivada de orden k $\zeta^{(k)}(s)$.

25. Considere $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$

(i) ¿Para que valores de x ésta serie converge absolutamente?
(ii) ¿En qué intervalo ésta serie converge uniformemente ?
(iii) ¿En qué intervalo falla la convergencia uniforme ?
(iv) ¿Es f continua donde quiera que la serie converge ?
(v) ¿Es f acotada ?

26. Demostrar que las serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ converge uniformemente y absolutamente para $0 \le |x| \le C$, donde C es cualquier número tal que $0 < C < 1$. Demostrar que la convergencia no es uniforme en $0 \le x < 1$.

27. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$ converge absolutamente y uniformemente en cualquier intervalo cerrado el cual no contiene números enteros.

28. Sea $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n+1} \\ sen^2 \frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \end{cases}$

(i) Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a una función continua, pero no uniformemente.

(ii) Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y demuestre que la serie converge absolutamente para cada valor de x, pero no uniformemente

Fin del cuarto bloque

§5. SERIES DE POTENCIAS

Si x, x_0 y a_n $(n=0,1,2,3,\dots)$ son números reales, a la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ se le llama **serie de potencias** de $(x-x_0)$. Las constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ son llamadas **coeficientes.**

El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} / \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \textit{ es convergente } \}$$

como lo hemos establecido en el teorema 4 del §4, es un intervalo llamado « **intervalo de convergencia** ».

Por ejemplo las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ tienen a $(-\infty, \infty)$ y $(-2, 2)$ como intervalos de convergencia respectivamente.

En $\mathbb{R}$ los intervalos de la forma $(x_0 - h, x_0 + h) = N(x_0)$, siendo $h > 0$, son llamados «**entornos** » de x_0.

Supongamos dada una función real f definida en algún entorno de $x_0 \in \mathbb{R} = E_1$, y supongamos que f admite derivadas de cualquier orden en este entorno. Podemos entonces con seguridad formar la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_0)^n$$

Nos preguntamos ¿converge esta serie para algún x además de $x = x_0$? . Si es así ¿ su suma es igual a $f(x)$? En general la respuesta a ambas preguntas es « **no** ». Una condición necesaria y suficiente para contestar afirmativamente ambas preguntas la encontramos en la fórmula de Taylor.

5.1. Fórmula de Taylor con resto

El teorema de valor medio ha sido interpretado geométricamente, pero existe otro aspecto del teorema que también nos ayuda a comprender su significado. Si f es continua en $[a,b]$ y tiene derivada en cada punto de (a,b), dado $x \in (a,b]$ podemos escribir

$$f(x) = f(a) + f'(x_0)(x-a) \quad \text{donde } a < x_0 < x$$

$a \quad x_0 \quad x$

$\exists x_0 \in (a,x)$ *tal que* $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Esta igualdad dice que la cantidad $f'(x_0)(x-a)$ mide el **error** cometido cuando $f(x)$ es aproximado a $f(a)$.

Desgraciadamente, el **teorema del valor medio** no nos indica como puede calcularse x_0: dice simplemente que $a < x_0 < x$.

Si x no está muy alejado de a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ será aproximadamente $f'(a)$. Esto es, $f'(x_0)$ será aproximadamente igual a $f'(a)$ y por consiguiente la igualdad

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

debe ser aproximadamente correcta cuando $x-a$ es pequeña. Esto significa que f es aproximadamente una función lineal en las proximidades de a.
El teorema de Taylor nos dice, con generalidad, que f puede aproximarse mediante un polinomio de grado $n-1$ si $f^{(n)}$ existe en (a,b). La importancia de este teorema radica en el hecho de que nos proporciona una expresión útil del error cometido por esa aproximación.

Teorema 1. *(Taylor) Sea f una función que tiene derivada n-ésima finita $f^{(n)}$ en todo intervalo (a,b) y supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Consideremos un punto $x_0\in[a,b]$. Entonces para todo x de $[a,b]$, $x\neq x_0$, existe $x_1\in(x,x_0)$ tal que*

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n$$

La demostración de este teorema se deduce de otro más general que daremos a continuación y el cual es una generalización del teorema del valor medio, y el cual recordaremos a continuación.

Teorema 2. *(del valor medio). Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con $g(a)\neq g(b)$. Si ambas funciones f y g son funciones derivables en cualquier punto del intervalo abierto (a,b), $f'(t)$ y $g'(t)$ no son ambas iguales a cero para cada $t\in(a,b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema 3. *Sean f y g dos funciones que poseen derivadas n-ésimas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ en el intervalo (a,b) y las derivadas de orden $n-1$ son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces, para todo x de $[a,b]$, $x\neq x_0$, existe x_1 interior al intervalo que une x con x_0 tal que*

$$[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k]g^{(n)}(x_1)=f^{(n)}(x_1)[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k]$$

Nota. En el caso especial en el cual $g^{(n)}(x)=(x-x_0)^n$, tenemos

$$g^{(k)}(x_0)=0 \text{ para } 0\leq k\leq n-1 \text{ y } g^{(n)}(x)=n!.$$

Este teorema 3 se reduce al teorema 1, ya que

$$[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k]n!=f^{(n)}(x_1)[\,(x-x_0)^n-\sum_{k=0}^{n-1}0\,]$$

Demostración **:** Para simplificar, supongamos que $x_0 < b$ y que $x > x_0$. Mantenemos fijo x y definamos dos nuevas funciones F y G de la siguiente forma:

$$F(x) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$
$$G(x) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k^1}(x-t)^k$$

para cada t en $[x_0, x]$. Estas funciones F y G son continuas en el intervalo cerrado $[x_0, x]$ y tiene derivadas finitas en el intervalo abierto (a, x). Por lo tanto, podemos aplicar el teorema del valor medio y escribir

$$F'(x_1)[G(x) - G(x_0)] = G'(x_1)[F(x) - F(x_0)] \text{ donde } x_1 \in (x_0, x)$$

Esta igualdad se transforma en la siguiente:

$$F'(x_1)[g(x) - G(x_0)] = G'(x_1)[f(x) - F(x_0)] \tag{1}$$

ya que $G(x) = g(x)$ y $F(x) = f(x)$. Si ahora calculamos la derivada de $F(t)$ tenemos

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1}[\tfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \tfrac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}]$$
$$= f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1}[\tfrac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \tfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k]$$
$$= f'(t) - \tfrac{f'(t)}{0!}(x-t)^0 + \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

resultando que

$$F'(t) = \tfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$$

Análogamente, obtenemos

$$G'(t) = \tfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)$$

Si suponemos $t = x_1$ y sustituimos en (1), deducimos

$$\tfrac{(x-\cancel{x_1})^{n-1}}{(\cancel{n-1})!} f^{(n)}(x_1)[g(x) - g(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k] =$$
$$= \tfrac{(x-\cancel{x_1})^{n-1}}{(\cancel{n-1})!} g^{(n)}(x_1)[f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k]$$

De donde se recibe

$$f^{(n)}(x_1)[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k] = g^{(n)}(x_1)[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k]$$

□

Definición. *Sea f una función real definida en un intervalo I de $\mathbb{R} = E_1$. Si f admite derivadas de cualquier orden en cada punto de I, escribimos $f \in C^\infty$ en I. (ie, f es de clase C^∞).*

Si $f \in C^\infty$ en algún entorno de un punto x_0, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ es llamada **serie de Taylor** engendrada por f en un entorno de x_0. Para indicar que f genera la serie, escribimos

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

La pregunta que aquí nos hacemos es : ¿Cuándo podemos reemplazar el símbolo $\sim$ por el símbolo = ?. La fórmula de Taylor establece que $f \in C^{\infty}$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ y si $x_0 \in (a,b)$ entonces para todo $x \in [a,b]$ y para todo n, tenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n$$

donde x_1 es algún punto comprendido entre x y x_0. El punto x_1 depende de x, x_0 y n. Luego una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor converja hacia f es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n = 0$$

En la práctica puede ser muy difícil manejar este límite a causa de la posición desconocida de x_1. En algunos casos, no obstante, puede obtenerse una cota inferior convergente para $f^{(n)}(x_1)$ y puede demostrarse que este límite es 0.Ya que $\frac{(x-x_0)^n}{n!} \to 0$, cuando $n \to \infty$ (esto se tiene, pues la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que

$$\left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(x-x_0)^n} \right| = \frac{|x-x_0|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = 0$). De donde tenemos la igualdad $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n = 0$, siempre y cuando la sucesión de funciones $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sea **uniformemente acotada** en $[a,b]$. Así pues podemos establecer la siguiente condición suficiente para representar una función mediante una serie de Taylor.

Teorema 4. *Supongamos que $f \in C^{\infty}$ en $[a,b]$ y además que $x_0 \in [a,b]$. Consideremos además que existen un entorno $N(x_0)$ y una constante M (La cual podría depender de x_0) tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ para todo $x \in N(x_0) \cap [a,b]$ y para todo $n = 1,2,3,\ldots$ En estas condiciones para cada $x \in N(x_0) \cap [a,b]$ tenemos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,, \quad \textit{si } x_0 \leq x < b.$$

Teorema 5. *(De Bernstein) Supongamos que $f \in C^{\infty}$ en un intervalo abierto de la forma $(a-\delta, b)$, siendo $\delta > 0$ y consideremos que f y todas sus derivadas son positivas en el intervalo semi-abierto $[a,b)$. Entonces, para todo x_0 en $[a,b)$, tenemos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,, \quad \textit{si } x_0 \leq x < b.$$

***Demostración*:** Consideremos $x_0 \in [a,b)$ y supongamos que $x \in [a,b)$. Entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ tiene los términos positivos y a causa de que

$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n$, sus sumas parciales están acotadas superiormente por $f(x)$. Luego la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converge y tiene una suma $\leq f(x)$. Aplicando el mismo razonamiento a $f^{(n)}$, encontramos que la n-ésima derivada de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converge y tiene una suma $\leq f^{(n)}(x)$.

Por consiguiente si escribimos

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$g(x)$ y todas sus derivadas $g^{(n)}(x)$ son no negativas si $x_0 \leq x < b$.

A continuación, demostremos que $g(x) = 0$ si $x_0 \leq x < \frac{x_0+b}{2}$, esta restricción impuesta a x implica $x_0 \leq x \leq 2x - x_0 < b$. Por lo tanto podemos elegir un número y que satisface $2x - x_0 < y < b$ y hacer uso de la fórmula de Taylor para escribir

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(y-x)^k + \frac{f^{(n)}(y_1)}{n!}(y-x)^n \tag{1}$$

en donde $x < y_1 < y$. Ahora bien, $f^{(n)}$ es una función creciente, (¿por que?) por consiguiente $f^{(n)}(y_1) \geq f^{(n)}(x)$.

Por lo tanto (1) nos da

$$f(y) \geq \frac{f^{(n)}(y_1)}{n!}(y-x)^n \geq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n$$

o bien de los extremos se tiene

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq \frac{f(y)}{(y-x)^n}$$

Volviendo al resto de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(y-x)^k + \frac{f^{(n)}(y_1)}{n!}(y-x)^n$, podemos escribir

$$0 \underset{x_0<x_1<x}{\overset{\uparrow}{\leq}} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n \leq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n \leq f(y)\left(\frac{x-x_0}{y-x}\right)^n \quad (^1)$$

Pero $\quad 0 \underset{2x-x_0<y}{\overset{\uparrow}{\leq}} \frac{x-x_0}{y-x} < 1$ debido a la manera como fue escogido y.

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0) = 0$$

Y esto significa que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,, \text{ si } \quad x_0 \leq x < \frac{x_0+b}{2}$$

□

5.2. La serie binomial.

Como un ejemplo del teorema de Bernstein, obtemos el desarrollo siguiente, conocido con el nombre de la **serie binomial**.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ si } -1 < x < 1$$

donde α es un número real cualquiera y

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

El teorema de Bernstein no puede aplicarse directamente en este caso. Sin embargo, podemos razonar así: Consideremos $f(x) = (1-x)^{-c}$, siendo $c > 0$ y $x < 1$. Entonces

$$f^{(n)}(x) = c(+1)(c+2)\cdots(c+n-1)(1-x)^{-c-n}$$

---

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{y-x}\right)^n$ es convergente, luego tenemos $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-x_0}{y-x}\right)^n = 0$

y por lo tanto $f^{(n)}(x) \geq 0$ para cada n, con tal que $x < 1$. Por consiguiente podemos aplicar el teorema de Bernstein, poniendo $x_0 = 0$, $\alpha = -1$ y $b = 1$. Entonces

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-c}{k}(-1)^k x^k \quad \text{si } -1 < x < 1$$

sustituyendo c por $-\alpha$ y x por $-x$, encontramos

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

es cierto para cada $\alpha < 0$. Pero ahora la validez de $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ puede extenderse a cualquier valor de α por integración sucesiva. Naturalmente, si α es un entero positivo, por ejemplo $\alpha = m$, entonces $\binom{m}{n} = 0$ para $n > m$ y $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ se reduce a una suma finita (fórmula del binomio de Newton) .

5.3. Teoria de Abel.

Si $-1 < x < 1$, la integración de la serie geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$ nos da el desarrollo en serie de $log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ también válida para $-1 < x < 1$. Si ponemos $x = -1$ en $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, obtenemos la serie alternada convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; nos preguntamos. ¿Podríamos también poner $x = -1$ en el primer miembro de $log(1-x)$?. El teorema siguiente contesta afirmativamente esta pregunta.

Teorema 6. *(Abel) Supongamos que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$*, si* $-r < x < r$. *Si la serie converge también en* $x = r$, *entonces el límite* $\lim_{x\to r^-}f(x)$ *existe y tenemos*

$$\lim_{x\to r^-}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n.$$

***Demostración* :** Para simplificar, suponiendo que $r = 1$ (esto equivale a un cambio de escala). Entonces nuestra hipótesis es que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ se tiene definida para $-1 < x < 1$ y que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente. Escribimos $f(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Tenemos que demostrar que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$, ó, de otra manera, que f es continua a la izquierda de $x = 1$

$$\frac{1}{1-x} \cdot f(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{donde} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Luego tenemos

$$f(x) - f(1) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} [c_n - f(1)]x^n, \quad \text{si} \quad -1 < x < 1 \tag{1}$$

Esto se tiene por que

$$f(x) - f(1) = f(x) - \frac{(1-x)f(1)}{(1-x)} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - (1-x)f(1)\sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} [c_n - f(1)]x^n$$

Por hipótesis, $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = f(1) = \sum\limits_{k=}^{\infty} a_k$. Por consiguiente dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ implica que $|c_n - f(1)| < \frac{\epsilon}{2}$. Si dividimos la suma (1) en dos partes , obtenemos

$$f(x) - f(1) = (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} [c_n - f(1)]x^n + (1-x)\sum_{n=N}^{\infty} [c_n - f(1)]$$

Designemos con

$$M = max\{|c_n - f(1)|, n = 0, 2, 3, \dots, N-1\}$$

Así si $0 < x < 1$ tenemos

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x)MN + (1-x)\frac{\epsilon}{2}\sum_{n=N}^{\infty} x^n (= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+N})$$

$$= (1-x)MN + (1-x)\frac{\epsilon}{2}\frac{x^N}{1-x} < (1-x)MN + \frac{\epsilon}{2}$$

Escogiendo ahora $\delta = \frac{\epsilon}{2MN}$. Entonces $0 < 1 - x < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(1)| < \epsilon$. Lo anterior es equivalente a que $\lim\limits_{n \to 1^-} f(x) = f(1)$. Esto completa la demostración.

□

Ejemplo. Podemos suponer en $log(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x = -1$ para obtener $log2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Teorema 7. *Sean $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series convergentes y designemos con $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ su producto de Cauchy. Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ converge entonces tenemos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Demostración **:** Las dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ son ambas convergentes para $x = 1$ y por lo tanto, convergen en el intervalo $(0, 1)$. Mantengamos $|x| < 1$ y escribamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big)$$

donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ es el producto de Cauchy y ya demostramos en el corolario del teorema 22 del §3, sobre convergencia absoluta que, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente. Consideremos ahora el $x \to 1^-$ y apliquemos el teorema 6 de Abel, para concluir la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

□

5.3. Ejercicios.

1. Hallar la serie de Taylor alrededor de $x = 2$ para

$$f(x) = x^3 + 2x + 1 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Probar que la serie de Taylor converge a $f(x)$ para todo x.

2. Si f es una función a valor real en $[a, a+h]$ tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo $x \in [a, a+h]$ y $f^{(n+1)}$ es continua en $[a, a+h]$, entonces

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Este resultado es conocido como "$fórmula\ de\ Taylor\ con\ resto\ integrable$".
Halle la fórmula de Taylor con resto integrable de $f(x) = sen\,x \ (-\infty < x < \infty)$ y $a = 0$. Demuestre además que

$$\Big|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,\Big| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

3. Demuestre que la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para $f(x) = sen\,x$ converge para $sen\,x$ para todo x .

4. Halle la fórmula de Taylor para las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = log(1+x) \quad (-1 < x < \infty),\ \ x_0 = 2,\ \ n = 4$
   $(b) f(x) = arc\,tag\,x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}),\ x_0 = 0,\ n = 3$
   $(c) f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} \quad (-1 < x < 1),\ x_0 = 0,$ n cualquier entero

5. Supóngase que la serie $f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge, y sea a un número cualquiera tal que $0 < a < |x_0|$. Probar que sobre el intervalo $[-a, a]$ la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente (y absolutamente). Además probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = g(x)$ converge uniformemente. Finalmente pruebe que f es derivable y que $f'(x) = g(x)$ para todo x con $|x| < x_0$.

6. Halle la fórmula de Taylor de cada una de las siguientes funciones. Use el teorema 3 ó, el teorema de Bernstein para obtener la serie de Taylor:
$a)\ f(x)=\frac{1}{x-a},\ (a\neq 0),\quad x_0=0.\ \ b)\ f(x)=log(x-a)\,,\ a\neq x,\ x_0=0$
$c)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}},\quad x_0=0.\ \ d)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x_0=0$
7. Halle cada una de las siguientes sumas infinitas:
$i)\ 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots(=f(x),\ ¿Qué\, es\, f(x)\,?$
$ii)\ 1-x^3+x^6-x^8+\cdots$
$iii)\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 3}-\frac{x^5}{5\cdot 4}+\cdots$
$iv)\ \frac{1}{2\cdot 1}-\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}-\frac{1}{5\cdot 4}+\cdots$ (Recuerde el teorema de Abel)
$v)\ 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$
8. Si $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$ para $x\neq 0$ y $f(0)=1$, hallar $f^{(k)}(0)$, (Use fórmula de Taylor)
9. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge para $|x|<1$
(a) Demostrar que $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$ para $|x|<1$
(b) Demostrar ahora que cualquier función f que satisfaga la parte (a) es de la forma $f(x)=c(1+x)^{\alpha}$ para cualquier constante c, y utilizar este hecho para establecer la serie binomial $(Indicación:\ Considérese\ g(x)=\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}\,)$
10. (a) Supóngase que $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ converge para todo x de algún intervalo $(-R,R)$ y que $f(x)=0$ para todo x de $(-R,R)$. Demostrar que cada $a_n=0$.
(b) Supóngase que sólo sabemos que $f(x_n)=0$ para alguna sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Demostrar de nuevo que cada $a_n=0$
(c) Supóngase que $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ y $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ convergen para cada x en algún intervalo que contiene a 0 y que $f(x_n)=g(x_n)$ para alguna sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge hacia 0. Demostrar que $a_n=b_n$ para todo n. En particular, "una función tiene una representación única como serie de potencias centradas en 0".
11. Demostrar que si $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ es una función continua par, entonces, $a_n=0$ para todo n impar y si f es una función impar, entonces $a_n=0$ para todo n par.
12. La sucesión de Fibonacci $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está definida por $a_1=a_2=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$
(a) Demostrar que $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 2$
(b) Sea $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+2x^2+3x^3+\cdots$. Utilizar el criterio del cociente para demostrar que $f(x)$ converge si $|x|<\frac{1}{2}$
(c) Demostrar que si $|x|<\frac{1}{2}$, entonces $f(x)=\frac{-1}{x^2+x-1}$ $(Indicación:$ Esta ecuación se puede escribir como $f(x)-xf(x)-x^2f(x)=1\,)$
(d) Utilizar la descomposición en fracciones simples para $\frac{1}{x^2+x-1}$, y la serie de potencias de $\frac{1}{x-a}$ para obtener otra serie de potencias para f.

(e) Se sigue del ejercicio 10 anterior, que las dos series de potencias obtenidas para f deben ser idénticas. Utilizar este hecho para demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

13. Demostrar que la serie de potencias para $f(x) = log(1-x)$ converge solamente para $-1 \leq x < 1,$ y que la serie de potencias para $g(x) = log\frac{1+x}{1-x}$ converge solamente para los x de $(-1, 1)$.

14. Demostrar que la serie binómica $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ presenta el siguiente comportamiento en los puntos $x = \pm 1$

(a) Si $x = -1$, la serie converge para $\alpha \geq 0$ y diverge para $\alpha < 0$.

(b) Si $x = 1$, la serie diverge para $\alpha \leq -1,$ converge condicionalmente para $-1 < \alpha < 0,$ y converge absolutamente en [0,1]

15. Demostrar que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

16. Si cada $a_n \geq 0$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, demostrar que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge a $+\infty$ cuando x $\to 1^-$ (Supóngase que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 1$).

17. Si cada $a_n \geq 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe y es igual a A. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y tiene por suma a A.

18 . Sea $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}.$$

$i)$ Demuestre que existe $f^{(n)}(0)$ para todo x

$ii)$ Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge para todo x, pero no es igual a $f(x)$ si $x \neq 0$.

19. Sea $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$$

$i)$ Demuestre que $f \in \mathcal{C}^\infty$ en $(-\infty, \infty)$

$ii)$ Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge para todo x, pero no es igual a $f(x)$ si $x \neq 0$.

20. Demostrar que los siguientes desarrollos se tienen para $|x| < 1$:

$i)$ $arc\, sen\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

$ii)$ $arc\, tag\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$

$iii)$ $log\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+x})\} = \frac{1}{2}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^3}{6} - \cdots$

21. Si $x = y(\alpha + y)$ $(\alpha \geq 0)$ demostrar que:

$$y = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{4}{1\cdot 2}\frac{x^3}{\alpha^5} - \cdots(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\frac{x^n}{\alpha^{2n-1}} + \cdots$$

22. Sea $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ el desarrollo binomial. Investigar el compotamiento del desarrollo binomial en $x = \pm 1$.

24 Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \geq 0)$ una serie de potencias convergente en $|x| < 1$. Si $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe y es igual a A, demostrar que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

§6. SERIES DE FOURIER

6.1. Ortogonalidad

6.1.1 Funciones pares e impares

Sea S $\subseteq \mathbb{R}$, S $\neq \phi$ tal que si t $\in$ S entonces $-$t $\in$ S, y sea f una función definida en S, se dice que

a) f es una función « **par** » si $f(-\text{t}) = f(\text{t})$ para todo t $\in$ S

b) f es una función « **impar** » si $f(-\text{t}) = -f(\text{t})$ para todo t $\in$ S.

Ejemplo $f(\text{t}) = \text{t}^2$, t $\in \mathbb{R}$, $f(-\text{t}) = \text{t}^2 = f(t)$, luego f es par.
$g(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$, $g(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -g(t)$, por lo tanto g es impar.

Propiedades.

i) Si f y g son funciones pares definidas en S, entonces fg, f+g, $\frac{f}{g}$ con $g \neq 0$ son funciones pares.

ii) Si f y g son funciones impares definidas en S, entonces $f+g$ es impar , $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g \neq 0$ son funciones pares.

iii) Si f es par y g impar definidas en S, $f \neq 0$, $g \neq 0$ se tiene que $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ son funciones impares.

iv) Si f es par e integrable en $[-a,a]$ se cumple que:

$$\int_{-a}^{a} f(\text{t})\,\text{dt} = 2\int_{0}^{a} f(\text{t})\,\text{dt}$$

v) Si f es impar e integrable en $[-a,a]$, se tiene que

$$\int_{-a}^{a} f(\text{t})\,\text{dt} = 0$$

6.1.2. Funciones periódicas.

Sea f una función cuyo dominio de definición $S \neq \phi$ está en $\mathbb{R}$. La función f se dice **« periódica »** si existe T_o tal que si $t \in S$ se tiene que $t + T_o \in S$ y $f(t+T_o) = f(t)$ para todo $t \in S$. T_o se llama **« período »** de f. El período positivo mínimo de f se denomina **período fundamental.** Cuando se hable de funciones periódicas, mientras no se diga lo contrario, se trabaja con el período fundamental.

Ejemplo: $f(t) = sent$ es una función periódica con período $T_o = 2\pi$

$$f(t+2\pi) = sen(t+2\pi) = sent cos 2\pi + cost sen 2\pi = sent = f(t)$$

Propiedades.

i) Si f es de período T_o y $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f(t+nT_o) = f(t)$

ii) Si f es de período $T_o > 0$, e integrando en $[0,T_o]$ se tiene que:

(a) $$\int_{nT_o+a}^{nT_o+b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

(b) $$\int_a^{a+T_o} f(t)dt = \int_0^{T_o} f(t)dt$$

6.1.3 Producto hermitiano.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. El producto $\langle , \rangle$ sobre $\mathbb{V}$ se llama **« hermitiano »** si

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\to \mathbb{C} \\ (u,v) &\mapsto \langle u,v \rangle \end{aligned}$$

satisface las condiciones:

$\mathbf{H_1}$: $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$, para todo $u,v \in \mathbb{V}$

$\mathbf{H_2}$: Si u,v,w estan en $\mathbb{V}$, $\langle u,v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$

$\mathbf{H_3}$: Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\langle \alpha u,v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle$

$\mathbf{H_4}$: Para todo $u \in \mathbb{V}$, $\langle u,u \rangle \geq 0$

Ejemplo: Sea $\mathbb{V} = \{ f:[a,b] \to \mathbb{C} / \int_a^b f(x)dx \ \textit{existe} \}$. Para todo $f, g \in \mathbb{V}$ se define $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$. Entonces $\langle , \rangle$ cumple con H_1,H_2,H_3,H_4 así es un producto hermitiano sobre $\mathbb{V}$.

El producto hermitiano no garantiza que si $\langle f,f \rangle = 0$ entonces $f \equiv 0$, como se ve en el siguiente ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 2, \text{ si } t = a \\ 0, \text{ si } a \leq t \leq b \end{cases} , \qquad |f(t)|^2 = \begin{cases} 4, \text{ si } t = a \\ 0, \text{ si } a < t \leq b \end{cases}$$

ahora $\langle f,f \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$, pero $f \neq 0$

Esta situación es la que lo distingue del producto escalar. La siguiente definición da la relación entre producto hermitiano y producto escalar

H$_5$: El producto hermitiano se llama « **definido positivo** » si para todo $u \neq 0$ $\langle u,u\rangle > 0$ Es claro que si el producto hermitiano es definido positivo entonces se tiene que $\langle u,u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$. Se observa que un producto, es hermitiano definido positivo si y sólo si, es un producto escalar.

Propiedades.

i) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
ii) $\langle u,\alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u,v\rangle$

Definición: *Sea $\mathbb{V}$ espacio vectorial, la función que asigna a cada elemento $f \in \mathbb{V}$ el número $\| f \| \in \mathbb{R}$ tal que*

(1) $\| f \| \geq 0$, *y* $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

(2) $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

(3) $\| \alpha f \| = /\alpha/ \| f \|$,

es llamada una **«norma»** *sobre* $\mathbb{V}$.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto hermitiano $\langle , \rangle$ dos vectores u,v de $\mathbb{V}$ se dicen « **ortogonales** » si $\langle u,u\rangle > 0$, $\langle v,v\rangle > 0$ y $\langle u,v\rangle = 0$.

Un conjunto $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{V}$ es « **ortogonal** » si sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, todo par de vectores diferentes son ortogonales.

Ejemplo: El conjunto $\mathfrak{B} = \{ e^{2\pi i n f_o t}: a \leq t \leq b \text{ , } f_o = \frac{1}{b-a} \; n \in \mathbb{Z} \}$ con el producto $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$, es ortogonal.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial en el cual se tiene definido un producto hermitiano $\langle , \rangle$, si $f \in \mathbb{V}$, puesto que $\langle f, f\rangle \geq 0$ se define « **longitud** » de f al número real positivo definido por $\| f \| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ lo cual equivale a $\| f \|^2 = \langle f,f\rangle$. Se sabe que si $\| f \| = 0$ no necesariamente $f = 0$. Esta última afirmación es la que hace que $\| f \|$ no sea una norma, pues las demás propiedades de la norma se cumplen, por esta razón es llamada una **seminorma** .

Resultado: *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto hermitiano $\langle , \rangle$, entonces*

$$\forall u, \forall v \in \mathbb{V} \quad |\langle u,v\rangle| \leq \| u \| \; \| v \| \text{ .}$$

Esta desigualdad es llamada **desigualdad de Cauchy-Schwarz**

Un conjunto numerable $\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots\}$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice « **linealmente independiente** » , si para todo m, cada vez que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0 \text{ entonces } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

también es llamada una sucesión linealmente independiente.

Resultado: *Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.*

Se dice que una sucesión linealmente independiente es una **«base aproximada»** de $\mathbb{V}$ si para cada $f \in \mathbb{V}$ y cada $\epsilon > 0$, existe una combinación lineal $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ tal que

$$\| f - (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \| < \epsilon.$$

Resultado : *Si ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3,... es una base aproximada ortogonal de $\mathbb{V}$ y $f \in \mathbb{V}$, entonces la serie $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \cdots$ donde $\alpha_k = \frac{\langle f,\phi_k\rangle}{\langle \phi_k,\phi_k\rangle}$, converge a f.*

Si $\mathfrak{B} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortogonal de $\mathbb{V}$, entonces para todo $f \in \mathbb{V}$, existe α_n único, $n \in$ S tal que $f = \sum\limits_{n\in S}\alpha_n f_n$.

En efecto sea $f_m \in \mathfrak{B}$,

$$\langle f, f_m\rangle = \langle \sum_{n\in S}\alpha_n f_n, f_m\rangle = \sum_{n\in S}\alpha_n\langle f_n, f_m\rangle = \alpha_m\langle f_m, f_m\rangle$$

de donde

$$\alpha_m = \frac{\langle f, f_m\rangle}{\langle f_m f_m\rangle} \qquad \text{para } m \in S$$

Los números α_n son llamados **« coeficientes de Fourier »** .

Ejemplo: Hallar los coeficientes de Fourier de una función f para la base ortogonal

$$\mathfrak{B} = \{e^{2\pi i n f_o t} / \ a \le t \le b,\ f_o = \frac{1}{b-a},\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Puesto que $\langle f_n, f_n\rangle = b - a$, los α_n quedan así

$$\alpha_n = \frac{\langle f, f_n\rangle}{\langle f_n, f_n\rangle} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)e^{-2\pi i n f_o t}\,dt \quad , \ f_o = \frac{1}{b-a}\ , n \in \mathbb{Z}$$

Para justificar las afirmaciones anteriores hacemos referencia a un resultado del análisis funcional el cual es la piedra ángular en el estudio de las series de Fourier.

Teorema 1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio funcional con producto hermitiano dado por $\langle , \rangle$ y sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal en $\mathbb{V}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes, unas con las otras;*

SF$_1$: $f \in \mathbb{V} \Rightarrow f = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$

SF$_2$: $\langle x, e_i\rangle = 0 \ \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$

SF$_3$: *Si* $f \in \mathbb{V}$ *entonces* $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\langle f, e_n\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle}e_n$

SF$_4$: *Si* $f \in \mathbb{V}$ *entonces* $||f||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\langle f, e_n\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle}\right|^2$.

Se deduce del teorema 1 que el estudio de las series de Fourier se reduce al hecho de hallar conjuntos ortogonales en los distintos espacios funcionales con el producto hermitiano que se tenga. Un frabricante de conjuntos ortogonales lo hallamos al estudiar las **funciones propias de un operador autoadjunto de segundo orden.** Por esta razón damos un breve estudio de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes.

6.2. Solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Una ecuación de la forma $y'' + ay' + by = 0$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes, es llamada **ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.** Para hallar una solución rápida de esta ecuación es frecuente suponer que $y = e^{\lambda x}$ es una solución de prueba (o un modelo de solución), dado que $y' = \lambda e^{\lambda x}$ y $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ entonces se va tener que

$y = e^{\lambda x}$ es **solución de prueba** de $y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$

y esto solamente es posible si $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ya que $e^{\lambda x} \neq 0$, $\forall$x y $\forall\lambda$. Así se tiene que

$y = e^{\lambda x}$ es solución de prueba de $y'' + ay' + by = 0$ si y sólo si $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Por esta razón basta hallar los ceros del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, frecuentemente llamado **polinomio característico,** los cuales estan dados por

$$\lambda_{12} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Teniendose así los siguientes tipos de solución dependiendo del signo del discriminante $a^2 - 4b$:

1) $a^2 - 4b > 0$, en este caso el polinomio $p(\lambda)$ tiene dos raíces reales distintas

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \wedge \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

En ese caso se tiene que el conjunto $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ forman lo que se conoce como un **conjunto fundamental** de soluciones para la ecuación $y'' + ay' + by = 0$. Paralelamente se demuestra en un curso de ecuaciones diferenciales que el conjunto

$$\{f : I \to \mathbb{R} / f'' + af' + af = 0\}$$

llamado **conjunto solución** es un espacio vectorial de dimensión dos . Por esta razón la solución de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ es en este caso dado por

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2) $a^2 - 4b = 0$. Se tiene en este caso que las raíces de $p(\lambda)$ se reducen a una sola dada por

$$r = \frac{-a}{2}$$

y se obtiene una primera solución fundamental la cual denominaremos y_1 dado así:

$$y_1 = e^{\frac{-a}{2}x}$$

Para la obtención de una segunda solución que sea linealmente independiente con y_1 se hace uso de una táctica conocida con el nombre **de variación de la constante**, suponiendo que la nueva solución de prueba tiene la forma

$$y = v(x) y_1 = v(x) e^{\frac{-a}{2}x}$$

donde $v(x)$ es una función por determinar; así

$$y' = v' e^{\frac{-a}{2}x} - \frac{a}{2} v e^{\frac{-a}{2}x} \quad \wedge \quad y'' = v'' e^{\frac{-a}{2}x} - av' e^{\frac{-a}{2}x} + \frac{a^2}{4} v e^{\frac{-a}{b}x}$$

sustituyendo en $y'' + ay' + by = 0$ se llega

$$v'' e^{\frac{-a}{2}x} + \left(\frac{-a^2 + 4b}{4}\right) v e^{\frac{-a}{2}x} = 0 \Leftrightarrow v'' e^{\frac{-a}{2}x} = 0 \wedge e^{\frac{-a}{2}x} \neq 0 \Leftrightarrow v'' = 0.$$

En esta forma se sigue que $v(x) = x$ obteniéndose la segunda solución linealmente independiente se halla el conjunto fundamental de soluciones $\{ e^{\frac{-a}{2}x}, xe^{\frac{-a}{2}x}\}$ y en este caso la solución es la combinación lineal dada por

$$y = e^{\frac{-a}{2}x}(c_2 x + c_1)$$

3) Cuando $a^2 - 4b < 0$ entonces los ceros del polinomio característico $p(\lambda)$ son números complejos dados por

$$r_1 = \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i \quad \wedge \ r_2 = \frac{-a}{2} - \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$$

Denotando con α la parte real de estos números y con β la parte imaginaria tenemos que

$$r_1 = \alpha + \beta i \quad \wedge \ r_2 = \alpha - \beta i$$

En esta forma la base fundamental será el conjunto $\{e^{\alpha+\beta i}, e^{\alpha-\beta i}\}$. Por ser el conjunto solución un espacio lineal se puede tomar una combinación adecuada de los elementos de la anterior base para obtener una nueva base equivalente dada por

$$\{e^{\alpha x} cos\beta x, e^{\alpha x} sen\beta x\}$$

La solución en este caso será la siguiente combinación lineal

$$y = e^{\alpha x}[c_1 cos\beta x + c_2 sen\beta x]$$

Una mayor información se puede hallar en un curso común de ecuaciones diferenciales ordinarias.

6.3 El operador autoadjunto de segundo orden.

A continuación consideramos una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables y de segundo orden la cual va a depender de un parámetro λ.

Definición. *Una ecuación diferencial lineal de segundo orden se dice una* **forma autoadjunta** *si y solamente si se tiene*

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \ \ x_1 < x < x_2$$

donde $p(x) > 0$ *y* $r(x) > 0$ *en* (x_1, x_2) *y* $p'(x), q(x)$ *y* $r(x)$ *son todas funciones definidas en el intervalo* $[x_1, x_2]$.

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden dada por

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0 + \lambda]y = 0$$

donde $A_2 \in C^1([a,b])$ y $A_1, A_0 \in C([a,b])$, $A_2(x) \neq 0$. Hallemos la forma autoadjunta asociada a esta ecuación. Para esto introduzcamos una función $g \in C^1([a,b])$ de tal manera que se tenga

$$g(x)\{A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0 + \lambda]y\} = \{p(x)y'\}' + [q(x) + \lambda r(x)]y$$

La función $g(x)$ es llamada **"factor integrante"** y por lo tanto debe esperarse que satisfaga al siguiente sistema de ecuaciones

$$g(x)A_2(x) = p(x)$$
$$g(x)A_1(x) = p'(x)$$
$$g(x)(A_0(x) + \lambda) = q(x) + \lambda r(x)$$

es decir, se debe tener que

$$[g(x)A_2(x)]' = g(x)A_1(x)$$

lo cual es lo mismo que

$$g'(x)A_2(x) + g(x)A_2'(x) = g(x)A_1(x)$$

de donde se obtiene que

$$g'(x) = \frac{g(x)[A_1(x) - A_2'(x)]}{A_2(x)}$$

Cualquier solución no nula de esta ecuación diferencial nos sirve como factor integrante; así resolvemos la ecuación diferencial para $g(x)$ como sigue:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{A_1(x) - A_2'(x)}{A_2(x)} = \frac{A_1(x)}{A_2(x)} - \frac{A_2'(x)}{A_2(x)}$$

Integrando se obtiene

$$ln\, g(x) + lnA_2(x) = \int^x \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt$$

o en forma equivalente se tiene

$$lnA_2(x)g(x) = \int^x \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt$$

de donde

$$A_2(x)g(x) = exp\{\int^x \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt\}$$

El factor integrante deseado será dado por

$$g(x) = \frac{1}{A_2(x)} exp\{\int^x \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt\}.$$

Ejemplo. Hallar la forma autoadjunta asociada a la siguiente ecuación

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

Aquí

$$A_2(x) = x,\ \ A_1(x) = 1-x,\ \ A_0(x) = 0$$

El factor integrante estará dado por

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1-x}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow lng(x) = -\int^x dt = -x$$

así,

$$g(x) = e^{-x}$$

ahora tenemos

$$p(x) = g(x)A_2(x) = xe^{-x}$$
$$q(x) = g(x)A_0(x) = 0$$
$$r(x) = g(x) = e^{-x}$$

La forma autoadjunta deseada será

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = (xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0$$

Definición. *Sean* $r(x), q(x)$ *funciones definidas de* $[a,b]$ *en* $\mathbb{R}$ *tales que* $r(t) > 0,$ *ó,* $r(t) < 0$ *en* $(a,b), r'(t)$ *y* $q(t)$ *son continuas. Si* $y(t)$ *tiene segunda derivada continua en* (a,b), *se define el* **operador autoadjunto** *por*

$$Ly = (r(t)y'(t))' + q(t)y(t).$$

L es claramente lineal.

Sea λ un escalar tal que exista $y \neq 0,$ en el espacio funcional, tal que $Ly = \lambda y.$ Este escalar es llamado **"valor propio"** de L y la correspondiente función $y \neq 0$ es llamada **"función propia".**

Puede suceder que dada una base aproximada para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ la cual no es ortogonal con el producto hermitiano allí definido, sin embargo puede existir una función $p(x)$ continua en $[a,b]$ tal que con el siguiente producto hermitiano,

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b p(t)f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

la base, resulte ortogonal. A la función $p(t)$ se le llama **"función de peso".**

Identidad de Lagrange *: Sean λ_1, λ_2 valores propios del operador L y y_1, y_2 sus respectivas funciones propias, entonces se tiene que*

$$y_1\, Ly_2 - y_2\, Ly_1 = [r(t)(y_1y_2' - y_1'y_2)]'$$

***Demostración*:** Se trata simplemente de una verificación inmediata.

Teorema 2.(de Sturm-Liouville): *Sean λ_1 y λ_2 valores propios diferentes y y_1, y_2 sus respectivas funciones propias, sea $p(t)$ una función continua en $[a,b]$ y positiva en (a,b) tal que $Ly_1 = \lambda_1 p(t)y_1$, $Ly_2 = \lambda_2 p(t)y_2$. Si*

$$r(t)\Big[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = 0$$

entonces

$$\int_a^b p(t)y_1(t)y_2(t)\,dt = 0$$

Demostración **:** Haciendo uso de la identidad de Lagrange y cuentas adecuadas tenemos:

$$\begin{aligned} y_1(t)\lambda_2 p(t)y_2(t) - y_2(t)\lambda_1\, p(t)y_1(t) &= y_1(t)L[y_2(t)] - y_2(t)L[y_1(t)] \\ &= [r(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t))]' \end{aligned}$$

Luego

$$y_1(t)p(t)y_2(t)(\lambda_2 - \lambda_1) = (r(t)[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)])'$$

de donde integrando y usando el teorema fundamental del cálculo se recibe

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b p(t)y_1(t)y_2(t)\,dt = r(t)\big[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\big]_{t=a}^{t=b} = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\int_a^b p(t)y_1(t)y_2(t)\,dt = 0$ que equivale a $\langle y_1,y_2\rangle = 0$ o sea que y_1, y_2 son funciones ortogonales para el producto con función de peso $p(t)$.

□

Teorema 3. *Los autovalores de un operador autoadjunto son todos reales.*

Demostración **:** Supóngase que existe algún autovalor complejo λ_k con respecto a una autofunción $\phi_k(x)$, es decir

$$L[\phi_k(x)] + \lambda_k r(x)\phi_k(x) = 0$$

Puesto que el operador L está formado de funciones reales su conjugado complejo $\overline{L}$ es igual a L. Tomando el conjugado complejo a los dos lados, se obtiene

$$\overline{L[\phi_k(x)] + \lambda_k r(x)\phi_k(x)} = \overline{L[\phi_k(x)]} + \overline{\lambda}_k r(x)\overline{\phi_k(x)} = 0.$$

Se sigue ahora que $\phi_k(x)$ y $\overline{\phi_k(x)}$ corresponden a autovalores diferentes, λ_k y $\overline{\lambda}_k$ respectivamente, y por lo tanto son necesariamente ortogonales debido a que L satisface las hipótesis del teorema 2 . Esto indica que

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)\,\phi_k(x)\,\overline{\phi_k(x)}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} r(x)\,|\,\phi_k(x)|^2\,dx = 0$$

pero puesto que el integrando es positivo, esta integral jamás es cero, con lo cual obtenemos una contradicción. Nuestra afirmación de que existe un autovalor complejo es falsa y el teorema esta demostrado.

□

Ejemplo 1: Ortogonalidad de los polinomios de Legendre . De

$$[(t^2-1)P'_n(t)]' + \lambda_n P_n(t) = 0 \quad , \quad \lambda_n = n(n+1)$$

$n = 0,1,2,3,\cdots$ se tiene

$$[(t^2-1)P'_n]' + 0\cdot P_n(t) = -\lambda_n P_n(t)$$

$$r(t) = t^2-1,\ -1 < t < 1\ , r(-1) = r(1) = 0\ , q(t) = 0\ , p(t) = 1$$

así entonces, $r(t)[P_n(t)P'_m(t) - P'_n(t)P_m(t)]_{-1}^{1} = 0$ con $n \neq m$, luego

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n$$

así $n(n+1) \neq m(m+1)$ de donde $\lambda_n \neq \lambda_m$. En los libros de ecuaciones diferenciales se demuestra que

$$\int_{-1}^{1} [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

De esta forma $\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{, si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases}$

Por lo tanto $\{P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t), \ldots\}$ es una base aproximada ortogonal de $\mathbb{V} = \{f : [-1,1] \to \mathbb{C} / \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \ \textit{existe}\}$ para el producto hermitiano

$$\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

por lo tanto si $f \in \mathbb{V}$ entonces $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)$ donde $c_n = \frac{\langle f,P_n \rangle}{\langle P_n,P_n \rangle}$ o sea $c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\overline{P_n(t)}\,dt$, en estas condiciones se dice que f está desarrollada en **« serie generalizada de Fourier-Legendre »** .

Ejemplo 2. *Hallemos los valores y las funciones propias para el siguiente problema*

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

En este ejemplo y en los problemas propuestos es necesario el conocimiento a fondo del numeral 6.2. Así para resolver el problema, sea $y = e^{\alpha x}$ la cual hemos llamado una solución de prueba, entonces $y'' + \lambda y = e^{\alpha x}(\alpha^2 + \lambda)$ de donde tenemos el polinomio característico dependiendo ahora de dos parámetros $p(\alpha) = \alpha^2 + \lambda$. Por el teorema 3, λ debe ser real, por lo tanto cumple con la propiedad de tricotomía esto es, λ puede ser:

$$\lambda < 0, \text{ ó}, \lambda = 0, \text{ó}, \lambda > 0$$

Con estas posibilidades de λ , entonces α puede ser determinada como en efecto así lo haremos

1) Si $\lambda = 0$, el polinomio característico se reduce a $p(\alpha) = \alpha^2$ cuya raíz es $\alpha = 0$, repetida, en este caso el conjunto fundamental de soluciones es dado por $\{1, x\}$ y cualquier solución será dada por $y = c_1x + c_2$ (esta solución también se puede hallar integrando dos veces la ecuación $y'' = 0$). Por las condiciones en la frontera se tiene que

$$y(\pi) = c_1\pi + c_2 = c_1(-\pi) + c_2 = y(-\pi) \ \wedge \ y'(\pi) = c_1 = y'(-\pi)$$

de donde se obtiene que $c_1 = 0$ y c_2 toma cualquier valor, en particular $c_2 = 1$, así para el valor propio $\lambda = 0$ se halla la función propia $y_0 = 1$.

2) Si $\lambda < 0$ es frecuente tomar por comodidad $\lambda = -\omega^2 < 0$, donde $\omega \in \mathbb{R}$ y se puede determinar con la ayuda del polinomio característico $p(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = \alpha^2 - \omega^2$ cuyas raíces estan dadas por $\alpha = \pm\omega$ en esta forma el conjunto fundamental de soluciones estará dado por $\{e^{\omega x}, e^{-\omega x}\}$ en esta forma la solución de la ecuación $y'' - \omega^2 y = 0$ será:

$$y = c_3e^{\omega x} + c_4e^{-\omega x}$$

como

$$y(\pi) = c_3e^{\omega\pi} + c_4e^{-\omega\pi} = c_3e^{-\omega\pi} + c_4e^{\omega\pi} = y(-\pi)$$
$$y'(\pi) = \omega e^{\omega\pi} - \omega e^{-\omega\pi} = \omega e^{-\omega\pi} - \omega e^{\omega\pi} = y'(-\pi)$$

de donde se deduce que $c_3 = c_4 = 0$, en cuyo caso no hay funciones propias.

3) Finalmente, si $\lambda > 0$ como en 2), podemos tomar, $\lambda = \delta^2 > 0$, en este caso el polinomio característico toma la forma $p(\alpha) = \alpha^2 + \delta^2$ cuyas raíces estan dadas por $\alpha = \pm\delta i$, este caso como lo dijimos en el numeral 6.2 el conjunto fundamental estará dado por $\{cos\ \delta x, sen\ \delta x\}$ y la solución de la ecuación $y'' + \delta^2 y = 0$ será entonces

$$y(x) = c_5 cos\ \delta x + c_6 sen\ \delta x.$$

Ahora tenemos por otra parte

$$y(\pi) = c_5 cos\ \delta\pi + c_6 sen\ \delta\pi = c_5 cos\ \delta(-\pi) + c_6 sen\ \delta(-\pi) = y(-\pi)$$
$$y'(\pi) = -c_5\delta sen\ \delta\pi + c_6\delta cos\ \delta\pi = -c_5\delta sen\ \delta(-\pi) + c_6\delta cos\ \delta(-\pi) = y'(-\pi).$$

De aquí se tienen dos posibilidades :

(1) $2c_6 sen\ \delta\pi = 0$ y c_5 toma cualquier valor en particular $c_5 = 1$ y $\delta = n \in \mathbb{Z}$, en ese caso la solución estará dada por $y(x) = cosnx$.

(2) $2c_5 sen\delta\pi = 0$ y c_6 toma cualquier valor, en este caso $c_6 = 1$ y $\delta = n \in \mathbb{Z}$, teniendose entonces que la solución será $y(x) = sen\, nx$.

En resumen se tiene

$$\text{para } \lambda = 0 \longrightarrow y_0 = 1,$$

$$\text{para } \lambda = n^2 \longrightarrow y_n = \begin{cases} cosnx \\ sennx \end{cases} \text{ con } -\pi < x < \pi\ .$$

Ahora por ser $y'' + \lambda y = 0$, una forma autoadjunta se sigue del teorema 2 que las funciones propias forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para el producto hermitiano dado por (¿ por que? muestre que $(y_n y'_m - y'_n y_m\big|_{-\pi}^{\pi} = 0)$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt. \qquad (1)$$

Además por el teorema 1 se sigue que para toda función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ y como $\mathbb{V}=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\ /\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\quad existe\}$ es un espacio vectorial con producto hermitiano dado por (1) entonces

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cosnx+b_n sennx]$$

donde

$$a_0=\frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{\langle f,cosnx\rangle}{\langle cosnx,cosnx\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,cosnx\,dx$$

$$b_n=\frac{\langle f,sennx\rangle}{\langle senx,sennx\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sennx\,dx$$

En esta forma se dice que f ha sido desarrollada en **serie de Fourier trigonométrica.**

Teorema 4. (de Fourier). *Si una función periódica $f(x)$ con período 2π es seccionalmente continua en el intervalo $-\pi\le x\le\pi$ y, tiene derivada izquierda y derecha en cada punto de ese intervalo, entonces la serie de Fourier trigonométrica*

$$\frac{a_0}{2}+a_1cosx+b_1senx+a_2cos2x+b_2sen2x+\cdots+a_ncosnx+b_nsennx+\cdots$$

donde

$$a_0=\frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{\langle f,cosnx\rangle}{\langle cosnx,cosnx\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,cosnx\,dx$$

$$b_n=\frac{\langle f,sennx\rangle}{\langle senx,sennx\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sennx\,dx$$

es convergente y su suma es $f(x)$ excepto en los puntos x_0 donde la función es discontinua y en estos puntos se tiene

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

en ese caso se dice que $f(x)$ está representada en serie de Fourier.

Demostración **:** Veamos primero la convergencia de la serie

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_ncosnx+b_nsennx]$$

cuando $f\in C^2([-\pi,\pi])$.

Integrando dos veces por partes la fórmula de a_n se obtiene

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,cosnx\,dx=\frac{f(x)senx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{f'(x)cosnx}{n^2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)cosna\,dx.$$

Pero

$$\frac{f(x)senx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\quad\text{y}\quad\frac{f'(x)cosnx}{n^2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

así

$$a_n=-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)cosna\,dx.$$

Ahora como $f''(x)$ es continua en [-π,π] , entonces es uniformemente acotada, así existe $M>0$ tal que $|f''(x)|\le M$, además $|cosnx|\le 1$. Se concluye que

$$|a_n|=\frac{1}{n^2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\,cosna\,dx\Big|<\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Mdx=\frac{2M}{n^2}$$

De modo totalmente semejante se tiene que $|b_n|<\frac{2M}{n^2}$ en esta forma se tiene que

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cosnx+b_n sennx]\right|\leq\left|\frac{a_0}{2}\right|+2M(1+1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{3^2}+\cdots)$$
$$=\left|\frac{a_0}{2}\right|+4M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

De donde la convergencia de la serie de Fourier. Y por el criterio M de Weierstrass la convergencia es uniforme. Dado que $\{1,cosnx,sennx\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal en el espacio vectorial $\mathbb{V}=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}/\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\ \ \textit{existe}\}$, entonces el teorema 1 implica que $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cosnx+b_n sennx]$.

□

Supongamos ahora que $f(t)$ tiene período $T>0$. Entonces puede introducirse una variable x tal que $f(\ )$ como función de x, tenga período 2π. Para eso consideremos la siguiente transformación

$$\begin{array}{ccccc}[-\pi,\pi] & \xrightarrow{\omega} & [-\frac{T}{2},\frac{T}{2}] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \omega(x)=\frac{T}{2\pi}x & & \end{array}$$

Así $f:[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\to\mathbb{R}$ es tal que $f\circ\omega:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ resulta de período 2π, pues
$f(\omega(x+2n\pi))=f(\frac{T}{2\pi}(x+2n\pi\ ))=f(\frac{T}{2\pi}x+\frac{T}{2}2n)=f(t+T)=f(t)=f(\omega(x))$.
Así

$$f(t)=f(\frac{T}{2\pi}x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\,nx+b_n sen\,nx),$$

donde

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{T}{2\pi}x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{T}{2\pi}x)cos\,nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{T}{2\pi}x)sen\,nx\,dx$$

Ahora como

$$x=\frac{2\pi}{T}t,\ \Rightarrow dx=\frac{2\pi}{T}dt.$$

Por lo tanto

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot\frac{2\pi}{T}dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)cos\frac{2n\pi}{T}t(\frac{2\pi}{T}dt)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)cos\frac{2n\pi}{T}dt$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)sen\frac{2n\pi}{T}t(\frac{2\pi}{T}dt)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)sen\frac{2n\pi}{T}dt$$

Para ver que $\{1,cos\frac{2\pi}{T}t,sen\frac{2\pi}{T}t,\ldots,cos\frac{2n\pi}{T}t,sen\frac{2n\pi}{T}t,\ldots\}$ es un conjunto ortogonal en el intervalo $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ con el producto hermitiano $\langle f,g\rangle=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\overline{g(t)}\,dt$, basta ver que ellas son las funciones propias de problema S-L siguiente

$$y''+\lambda y=0,\quad y(-\tfrac{T}{2})=y(\tfrac{T}{2}),\quad y'(-\tfrac{T}{2})=y'(\tfrac{T}{2})\ .$$

Así si $f\in\{f:[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\to\mathbb{C}/\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt\ \ \textit{existe}\}=\mathbb{V}_p$ entonces

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos2\pi nf_0t+b_n sen2\pi nf_0t],$$

donde $f_0=\frac{1}{T}$, y

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt,\ a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)con2\pi f_ot\,dt,\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)sen2\pi nf_0t\,dt.$$

Por lo general $f(t)$ es en este caso una función real. **Fin del quinto bloque**

Teorema 5 (de Parseval). *Si dada $f(t)$, a_0, a_n ,b_n son los coeficientes de Fourier del desarrollo anterior entonces se tiene*

$$\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[|a_n|^2 + |b_n|^2]$$

Si f es real la expresión queda así :

$$\frac{2}{T}\int_0^T (f(t))^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2]$$

***Demostración* :** Se sabe de la hipótesis que

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos2\pi n f_0 t + b_n sen2\pi n f_0 t]$$

multiplicando los dos lados por $\frac{2}{T}\overline{f(t)}$ tenemos

$$\frac{2}{T}f(t)\overline{f(t)} = \frac{1}{2}a_0\frac{2}{T}\overline{f(t)} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\frac{2}{T}\overline{f(t)}cos2\pi n f_0 t + b_n\frac{2}{T}\overline{f(t)}sen2\pi n f_0 t].$$

Integrando en el intervalo $[0,T]$ se tiene:

$$\frac{2}{T}\int_o^T f(t)\overline{f(t)}dt =$$
$$\frac{1}{2}a_0\frac{2}{T}\overline{\int_0^T f(t)dt} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\frac{2}{T}\int_0^T\overline{f(t)}cos2\pi n f_0 t dt + b_n\frac{2}{T}\int_0^T\overline{f(t)}sen2\pi n f_0 t\, dt].$$

De donde

$$\frac{2}{T}\int_0^T|f(x)|^2dt = \frac{1}{2}a_0\overline{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\overline{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos2\pi n f_0 t\, dt} + b_n\overline{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)sen2\pi n f_0(t)dt}].$$

Así

$$\frac{2}{T}\int_o^T|f(t)|^2dt = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\overline{a_n} + b_n\overline{b_n}] = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[|a_n|^2 + |b_n|^2].$$

Si $f(t)$ es real necesariamente, a_n y b_n son reales teniéndose entonces que

$$\frac{2}{T}\int_0^T(f(t))^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2]$$

□

El teorema 5 nos dice que el conjunto ortogonal

$$\{1, cos\frac{2\pi}{T}t, sen\frac{2\pi}{T}t, \ldots, cos\frac{2n\pi}{T}t, sen\frac{2n\pi}{T}t, \ldots\}$$

satisface la propiedad SF_4 de teorema 1.

6.4. Desarrollos de medio rango.

Hemos mostrado que si $f \in \mathbb{V}_p$ donde

$$\mathbb{V}_p = \{f : [-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}] \to \mathbb{C} / \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt\, existe\, y\, f(t+T) = f(t)\}$$

entonces se obtiene el desarrollo

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\, cos2\pi n f_0 t \;+\; b_n\, sen\, 2\pi n f_0 t\,]$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt,\;\; a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)con2\pi f_0 t\, dt,\; b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sen2\pi n f_0 t\, dt.$$

Si $f(t)$ ***es par*** entonces tenemos que $b_n = 0$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t$$

donde

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(\xi)d\xi \ , a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(\xi)\cos 2\pi n f_0 \xi \, d\xi$$

Si $f(t)$ ***es impar*** entonces $a_0 = 0, \ a_n = 0$ y tenemos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen 2\pi n f_0 t \ , \text{donde} \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(\xi) sen 2\pi n f_0 \xi \, d\xi \ .$$

Sea $f(t)$ una función periódica de período $T = 2l$. Si f es par se obtiene la llamada « ***serie de Fourier cosenoidal*** »

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} t \quad (2\pi n f_0 = \frac{2\pi n}{2l})$$

con coeficientes

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\, dt \, , a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t) \cos \frac{\pi n}{l} t \, dt$$

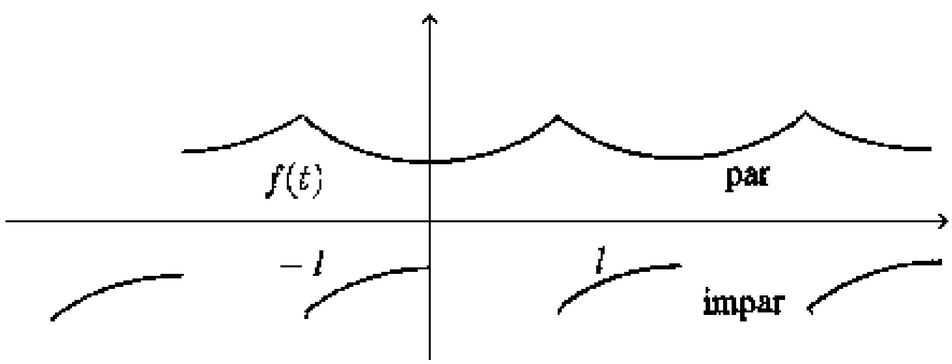
Si f es impar se obtiene la « ***serie de Fourier senoidal*** »

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen \frac{\pi n}{l} t$$

con coeficientes

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t) sen \frac{\pi n}{l} t \, dt \ , \quad n = 1,2,\ldots$$

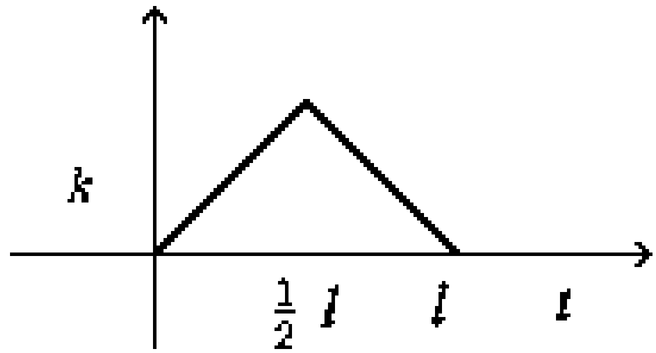
Supóngase que se da una función real $f(t)$ definida en el intervalo $[0, l\ ]$, se desea una extensión periódica con período T = 2 l a todo $\mathbb{R}$, esta puede hacerse de dos formas:



La función extendida es **par,** entonces obtenemos el llamado « ***desarrollo de medio par*** » de $f(t)$ y es dado por una serie de Fourier cosenoidal

(ii) Si la función extendida es **impar,** entonces obtenemos el llamado « ***desarrollo de medio rango impar*** » de $f(t)$. Es de notar que toda función definida es [0,l] tiene dos desarrollos de medio rango, el uno par y el otro impar.

Ejemplo : Encontrar los desarrollos de medio rango de la función



$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l} \; cuando \; 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l} \; cuando \; \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

Calculemos los coeficientes

$$\tfrac{1}{2}a_0 = \tfrac{1}{l}\left[\, \tfrac{2k}{l}\int_0^{l/2} t\,dt + \tfrac{2k}{l}\int_{l/2}^{l}(l-t)\,dt \,\right] = \tfrac{k}{2}$$

$$a_n = \tfrac{2}{l}\left[\tfrac{2k}{l}\int_0^{l/2} t\,cos\tfrac{n\pi}{l}\,t\,dt + \tfrac{2k}{l}\int_{l/2}^{l}(l-t)cos\tfrac{n\pi}{l}t\,dt \right] =$$
$$= \tfrac{4k}{n^2\pi^2}\,(2cos\tfrac{n\pi}{2} - cos\,n\pi - 1)$$

Así

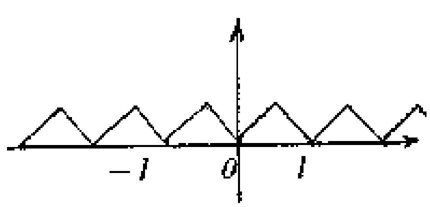
$$a_2 = \frac{-16k}{2^2\pi^2} \;\;, a_6 = \frac{-16k}{6^2\pi^2} \;\;, \; a_{10} = \frac{-16k}{10^2\pi^2} \;, \cdots$$

mientras que $a_n = 0$ cuando $n \neq 2,6,10,14,\ldots$. De aquí que el primer desarrollo de medio rango par de $f(t)$ es

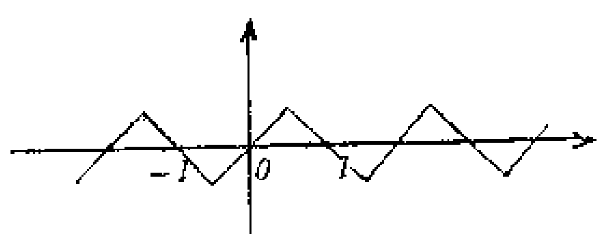
$$f(t) = \tfrac{k}{2} - \tfrac{16k}{\pi^2}\left(\tfrac{1}{2^2}cos\tfrac{2\pi}{l}t + \tfrac{1}{6^2}cos\tfrac{6\pi}{l}t + \cdots\right)$$

De modo semejante, $b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}sen\,\frac{n\pi}{2}$ y el otro desarrollo de medio rango impar $f(t)$ es

$$f(t) = \tfrac{8k}{\pi^2}\left(\tfrac{1}{1^2}\,sen\,\tfrac{\pi}{l}t - \tfrac{1}{3^2}sen\,\tfrac{3\pi}{l}t + \tfrac{1}{5^2}\,sen\,\tfrac{5\pi}{l}t - + \cdots\right)$$



EXTENSION PAR



EXTENSION IMPAR

6.5. Ejercicios

1. Demuestre que todo conjunto ortogonal en un espacio lineal con producto hermitiano es un conjunto linealmente independiente.
2. Tome un libro de Algebra Lineal, por ejemplo el de Serge Lang , y estudie el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt
3. Sea $\mathbb{V} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} / f(t)$ *tiene segunda derivada continua en* $[a,b]\}$, se define el operador auto-adjunto por $Ly = [r(t)y'(t)]' + q(t)y$, demostrar que L es lineal.
4. Sea $\mathbb{V}$ el mismo espacio de ejercicio anterior. Demostrar la identidad de Lagrange o sea demostrar que

$$y_1 Ly_2 - y_2 Ly_1 = [r(t)(y_1 y_2' - y_1' y_2)]'$$

5. Demostrar que $f(x) = sen\, 2x$ y $g(x) = cos\, x$ son ortogonales con respecto a la función de peso $r(x) = 1$.
6. Demostrar que $f(x) = 1$ y $g(x) = 1 - x^2$ son ortogonales en $(0, \infty)$ con respecto a la función de peso $r(x) = e^{-x}$.
7. Compruebe que cada uno de los siguientes conjuntos finitos o infinitos de funciones forman un sistema ortogonal en el intervalo dado y con la función de peso $p(x) = 1$.

$a)\{sen\, 2nx\},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
$b)\ \{cos\, 3x\}\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$
$c)\ x+1, 9x-5, 6x^2-6x+1, \qquad 0 \le x \le 1$
$d)\ x, cos\, x, cos\, 2x, \qquad -\pi \le x \le \pi$

8. Compruebe que cada uno de los siguientes conjuntos de funciones forman un sistema ortogonal en el intervalo dado y con la función de peso dada:

$a)\ 1, x, 5x^2-1, \quad p(x) = 1 - x^2, \qquad -1 \le x \le 1$
$b)\ 1, x, 2x^2-1, \quad p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad -1 \le x \le 1$
$c)\ 1, 2-x, x^2-6x+6, \quad p(x) = xe^{-x}, \qquad 0 \le x < \infty$
Sugerencia: Muestre que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$
$d)\ 1, x, x^2-1,\ p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$

9. Sea $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$ Demuestre que $\langle , \rangle$ es un producto hermitiano para las funciones definidas en el intervalo [0,1].
Sea ahora $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3.$ Evalúe:

a) $\langle f_1,f_2 \rangle$ $\quad b)\ \langle f_1,f_3 \rangle$ $\quad c)||f_1||$ $\quad d)\ ||f_2||$
$e)\ \langle f_1+f_2, f_1+f_3 \rangle$ f) $\langle 2f_1 - f_2, f_2 - f_3 \rangle$

10. Halle los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville siguiente:

$$y'' + \lambda y = 0,\ \ y(-\pi) = y(\pi),\ \ y'(\pi) = y'(-\pi)$$

11. Hallar las funciones propias y los valores propios de los siguientes problemas de Sturm-Liouville:

a) $y'' + 4y' + (\lambda+4)y = 0, y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$
$b)\ y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0,\ y'(l) = 0$
$c)\ y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(l) = 0$
$d) y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0$
$e)\ y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 0$

$f)\, y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) + y'(0) = 0, y'(1) = 0$

12. Halle la forma auto-adjunta asociada a cada una de las siguientes ecuaciones:
. $a)\, xy'' + \lambda y = 0, \qquad x > 0$
$b)\, y'' - y' + \lambda y = 0,$
$c)\, x\,y'' + (1-x)\,y' + \lambda y = 0, \qquad x > 0$
$d) (1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1$
$f)\, x^2 y'' + x\,y' + (\lambda x^2 - n^2) y = 0, \; x > 0$
$g)\, x^2(1+x^2)\,y'' + 2x^3 y' + \lambda y = 0, \; x > 0$

13. La ecuación $(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2 y = 0$ es llamada ecuación de Chebyshev cuya solución son los polinomios de Chebyshev $T_n(x) = cos[n\, arc\, cos\, x]$ para $-1 \leq x \leq 1$. Demostrar que los polinomios de Chebyshev forman un conjunto ortogonal.

14. La ecuación $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$ es conocida como la ecuación de Laguerre cuya solución es dada por $L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})$ para $0 \leq x < \infty$, estas funciones son llamadas los polinomios de Laguerre. Demostrar que los polinomios de Laguerre forman un conjunto ortogonal.

15. La ecuación $y'' - xy' + ny = 0$ es conocida como ecuación de Hermite y tiene por solución a las funciones $H_{n+1}(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$, llamadas polinomios de Hermite. Demostrar que los polinomios de Hermite forman un conjunto ortogonal en $-\infty \leq x \leq \infty$.

16. Expresar las siguientes funciones en serie de Fourier trigonométrica:

$a)\, f(t) = \begin{cases} 1, & para\, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & para\, \frac{\pi}{2} < t < 2\pi \end{cases} \qquad b)\, f(t) = t,\, para\, -\pi < t < \pi$

$c)\, f(t) = sen\frac{t}{2}, \; -\pi < t < \pi \qquad d)\, f(t) = \pi^2 - t^2, para\, -\pi < t < 0$

$e)\, e) f(t) = \begin{cases} 2, & para\ 0 < t < \frac{2\pi}{3} \\ 1, & para\ \frac{2\pi}{3} < t < \frac{4\pi}{3} \\ 0, & para\ \frac{4\pi}{3} < t < 2\pi \end{cases} \quad f) f(t) = \begin{cases} -t, & para\ -\pi < t < 0 \\ t, & para\ \ 0 < t < \pi \end{cases}$

$g)\, f(t) = \begin{cases} cos\, t, & para\ -\pi < t < 0 \\ sen\, t, & para\ \ 0 < t < \pi \end{cases} \quad h) \begin{cases} 0, & para\ -\pi < t < 0 \\ t^2, & para\, 0 < t < \pi \end{cases}$

17. Expresar las siguientes funciones en serie de Fourier trigonométrica:

$a)\, f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & para\ -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ |x|, & para\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & para\ \ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

$b) f(x) = \begin{cases} x + \pi, & para\ -\pi < x < 0 \\ x - \pi, & para\ 0 < x < \pi \end{cases}$

$c)\, f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi, \qquad d)\, f(x) = e^{-|x|}, \quad -\pi < x < \pi$

$e) f(x) = \begin{cases} -e^x, & -\pi < x < 0 \\ e^x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f)\, f(x) = \begin{cases} x^2, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$g)\, f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi h) f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$

$i) f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad j) f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$k) f(x)\begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ cos\, x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ $\quad l) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$n)\ f(x) = x(1-x),\ -\pi \leq x < \pi$ $\quad m)\ f(x) = -1, \quad -1 < x < 1$

o) $f(x) = (1+x^2), \quad - \ < x < 2$ $\quad p) f(x) = 1 - x^2, \quad -1 < x < 1$

18. Cuales de las funciones siguientes ¿ son pares , impares, o ni impares ni pares ?

a) $e^x, e^{x^2}, sen\, nx,\ xsen\, x,\ \frac{cos\, x}{x},\ lnx,\ sen\, x^2, sen^2 x$

$b)$ $|x|,\ xcos\, x, sen\, x + cos\, x,\ c$(constante), $ln(1+e^x) - \frac{x}{2}$

19. Las siguientes funciones se suponen son periódicas, de período 2π, ¿ cuáles son pares, impares o ni impares ni pares ?

$a)\ f(x) = x \ \ (-\pi < x < \pi)$ $\quad b) f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$

$c)\ f(x) = x|x| \ \ (-\pi < x < \pi)$ $\quad d)\ f(x) = e^{|x|}\ (-\pi < x < \pi)$

$e) f(x) = \begin{cases} x, & si\ 0 < x < \pi \\ 0, & si\, \pi < x < 2\pi \end{cases}$ $\quad f) f(x) = \begin{cases} -x^3, & si\ -\pi < x < 0 \\ x^3, & si\ \ 0 < x < \pi \end{cases}$

$g) f(x) = \begin{cases} x, & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \\ 0, & (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$ $\quad h) f(x) = \begin{cases} x^2, & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \\ -x^2, & (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

20. Si $f(x)$ es impar, entonces mostrar que $|f(x)|$ y $f^2(x)$ son pares

21. Si $f(x)$ es par, entonces mostrar que $|f(x)|, f^2(x)$ y $f^3(x)$ son pares.

22. Si $g(x)$ está definida para toda x, entonces demostrar que la función $p(x) = \frac{g(x)+g(-x)}{2}$ es par y la función $q(x) = \frac{g(x)-g(-x)}{2}$ es impar.

23. Usando 22, representar las siguientes funciones como suma de una función par y una función impar

$a)\ \frac{1}{1-x}\ b)\ \frac{1}{1-x^2} \qquad c)\ e^x \quad d)\ \frac{x}{x+1}$

24. Hallar las series de Fourier de las funciones siguientes que se suponen tienen período 2π.

$a)\ f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\quad b) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ \pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

$c) f(x) = \frac{x^2}{4}\ \ (-\pi < x < \pi)$ $\quad d) f(x) = |sen\, x|\ \ (-\pi < x < \pi)$

25. Usando series de Fourier de algunas funciones de los ejercicios anteriores o usando la identidad de Parseval demuestre que

$a)\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\ \ (Use \ \ 24a))$

$b)\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\ (Use \ \ 22c)$

$c)\ 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$

d) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$

26. Hallar los desarrollos de medio rango de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = 1\ \ (0 < x < l)$ $\quad b)\ f(x) = 1 - x\, (0 < x < l)$

$c)\ f(x) = x\ (0 < x < l)$ $\quad d)\ f(x) = x^2 \quad (0 < x < l)$

$e)\ f(x) = 1\ (0 < x < \pi)$ $\quad f)\ f(x) = x \quad (0 < x < 1)$

$g)\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ $\quad h)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

$i)\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{8} \\ \frac{\pi}{4} - x & \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\quad j)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

$k)\ f(x) = x^2\ (0 < x < l)$ $l)\ f(x) = e^x\ \ (0 < x < l)$
$m)\ f(x) = sen\frac{\pi x}{l}\ \ (0 < x < l)$ $n)\ f(x) = sen\frac{\pi x}{2l}\ \ (0 < x < l)$
$o)\ f(x) = x = x^2\ \ (0 < x < l)$ $p)\ f(x) = sen\, x\ \ \ (0 < x < \pi)$
$r)\ f(x) = cos\, x\ (0 < x < \pi)$ $s)\ f(x) = e^{2x}\ \ (0 < x < 1)$
$t)\ \ f(x) = 1 - x^2\ \ (0 < x < \pi)$ $u)\ f(x) = e^{-x}\ (0 < x < 1)$

27. Dada la función $f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi$, hallar
    a) El desarrollo senoidal
    b) El desarrollo cosenoidal
    c) La serie de Fourier completa en forma trigonométrica.

§7. TRABAJOS DIRIGIDOS EN FORMA DE TALLER

Taller No.1

$\boldsymbol{Grupo}$ 1.

(a)Hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{5}$.

(b) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$.

$\boldsymbol{Grupo}$ 2.

Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales $, s_n \leq M$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ probar que $L \leq M$

$\boldsymbol{Grupo}$ 3.

Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y si $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = L$, $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m-1} = L$, pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$. (Esto es, si las subsucesiones de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de términos pares y de términos impares convergen a L, entonces la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a L).

$\boldsymbol{Grupo}$ 4.

(a) Halle $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.03$

(b) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

Taller No.2

$\boldsymbol{Grupo}$ 1.

Halle el límite superior y el límite inferior para las siguientes sucesiones

$(a)\, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ $\quad (b)\, \{sen(\frac{n\pi}{2})\}_{n=1}^{\infty}$

$(c)\, \{(1+\frac{1}{n})\, cos\, n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad (d)\{\, (1+\frac{1}{n})^{n}\}_{n=1}^{\infty}$

Grupo 2.

¿Cuales de las siguientes sucesiones son monótonas?

$(a)\, \{sen\, n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad (b)\, \{tan\, n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad (c)\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ $(d)\{2n+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

Grupo 3.

Sea $s_1 = \sqrt{2}$ y sea $s_{n+1} = \sqrt{2}\sqrt{s_n}$ para $n \geq 1$

(a) Pruebe, por inducción que $s_n \leq 2$ para todo n

(b) Pruebe que $s_{n+1} \geq s_n$ para todo n

(c) Pruebe que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente

(d) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$

Grupo 4.

Supóngase que $s_1 > s_2 > 0$ y sea $s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1})(n \geq 2)$. Pruebe que

(a) $s_1, s_3, s_5, \ldots$ es decreciente

(b) $s_2, s_4, s_6, \ldots$ es creciente

(c) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Grupo 5.

Demuestre que :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log\, n}{n} = 0$ (donde log es el logaritmo natural)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(logn)^k}{n} = 0$ (k es una constante)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{logn}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$.

Grupo 6.

Para $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ (a) Probar que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente. (b) Usando solamente hechos establecidos en la prueba de $\lim\limits_{n\to\infty}\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$, para probar que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada por encima y probar que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \geq \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Taller No. 3

Grupo 1.

1. Probar que $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots$ es convergente.

2. Si $0 \leq a_n \leq 1\,(n \geq 0)$ y si $0 < x < 1,$ entonces probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge y que su suma no es más grande que $\frac{1}{1-x}$.

Grupo 2.

1. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ es divergente.

2. Clasifique como divergente, condicionalmente convergente ó absolutamente convergente a cada una de las siguientes series:

$(a)\, 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$ $(b)\, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

$(c)\, \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots$ $(d)\, 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$

Grupo 3.

1. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \epsilon$. Esta propiedad es conocida como **condición de Cauchy para las series.**

2. Pruebe que si $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ converge a A, entonces $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_2 + a_3) + \frac{1}{2}(a_3 + a_4) + \cdots$ es convergente. ¿Cual es el valor de la suma de la segunda serie?.

Grupo 4.

1.¿Para que valores de p la serie $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$ es convergente?

2. Si x no es un número entero, probar que $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \cdots$ es convergente.

Grupo 5.

1. ¿ Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} log(1 + \frac{1}{n})$ convergente ó divergente? ¿ cuál es la razón de su afirmación?.

2. Pruebe que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ la serie

$$a + (a + b) + (a + 2a) + (a + 3b) + \cdots$$

diverge a menos que $a = b = 0$.

Grupo 6.

1. Pruebe que la serie $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots$ es convergente si y sólo si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. La serie así obtenida es llamada **serie telescópica** y se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

2. ¿ Para que valores de x la serie

$$(1 - x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x - x^4) + \cdots$$

es convergente?.

Grupo 7.

1. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ converge ó diverge ? ¿ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{10^{10}(n+2)}$ converge ó diverge ?

2. Mostrar que si la serie $a_1+a_2+a_3+\cdots$ converge a L, entonces también $a_1+0+a_2+0+a_3+0+\cdots$ converge a L. Más generalmente mostrar que cualquier número de términos con 0 pueden ser insertados en una serie convergente sin alterar su convergencia ó suma.

Taller No.4

Grupo 1.

1.Pruebe si es verdad ó de un contra-ejemplo en caso de ser falso: Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es una serie convergente de números reales positivos y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es una serie divergente de términos positivos, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

2. ¿ cuales de las siguientes series son convergentes ?

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!} \qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2} \qquad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4+2^n}.$$

Grupo 2.

1. (a) ¿El criterio de la razón da alguna información acerca de la convergencia de la serie $\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$?.

(b) ¿Es esta serie convergente?

2. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, y si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

Grupo 3.

1. Use el criterio de la raíz en las siguientes series y que puede concluir en

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n} \qquad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{2n}}{e^n}.$$

2. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ converge para todo $x\in\mathbb{R}$.

3. ¿ Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ es convergente ?.

Grupo 4.

1. Pruebe que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = log\frac{1}{1-x}$.

2. Estudie la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$.

Grupo 5.

1. Pruebe que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{log[(1+\frac{1}{n})^n(1+n)]}{(logn^n)[log(n+1)^{n+1}]} = log_2\sqrt{e}$.

2. Pruebe que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

Grupo 6.

1. Mostrar que si $|x| < 1$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{10000}x^n$ converge absolutamente.

2. Para cada $x > 0$ probar que las series $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ y $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ convergen absolutamente.

Grupo 7.

1.¿ Para que valores de x la serie $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ converge ?

2. ¿ Para que valores de x la serie $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ converge ?

3. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.

Taller No.5

Grupo 1.

1. Sea χ_n la función característica del intervalo abierto $(0,\frac{1}{n})$ $(0 \leq x \leq 1)$

(a) Probar que $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 en $[0,1]$

(b) ¿Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|\chi_n(x) - 0| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in [0,1]$?

(c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \chi_n(x)dx$

(d) Compare (a) con (c).

$(Sea\, A \subset \mathbb{R},\ entonces\, \chi_A\ es\ llamada$ **función característica** $de\ A\ y\, est$á $definida$ así :

$$\chi_A = \begin{cases} 1\, si\ x \in A \\ 0\, si\ x \notin A \end{cases} \quad)$$

2.¿ Será la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ uniformemente convergente en $(-\infty,\infty)$?

Grupo 2.

1. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$una sucesión de funciones en $[a,b]$ tal que $f_n'(x)$ existe para cada $x \in$ [a,b] $(n \in \mathbb{N}$ y

(1) $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para algún $x_0 \in [a,b]$
(2) $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$
Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$.

2. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformemente en cualquier intervalo acotado, pero no converge absolutamente para ningún valor de x.

Grupo 3.

1. Consideremos $f_n = \frac{x}{1+nx^2}$ si $x \in \mathbb{R}$, $n = 1,2,3,\ldots$ Encontrar la función límite f de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la función límite de la sucesión $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$.
(a) Demostrar que $f'(x)$ existe para todo x pero $f'(0) \neq g(0)$.¿Para qué valores de x es $f'(x) = g(x)$?
(b) ¿ En qué subintervalo de $\mathbb{R}$, $f_n \to f$ uniformemente ?
(c) ¿ En qué subintervalo de $\mathbb{R}$, $f_n' \to g$ uniformemente ?

2. Si $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ es convergente, pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ converge uniformemente para $0 \leq x \leq 1$.

Grupo 4.

1. Sea $f_n(x) = x(1+\frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\, x = 0\,, \text{ó},\ x\, es\, irracional \\ b + \frac{1}{n} & si\, x \in \mathbb{Q}\ (x = \frac{b}{a}\quad a > 0) \end{cases}$$

(i) Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente en cualquier intervalo acotado.
(ii) Demostrar que $\{f_n \cdot g_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformente en ningún intervalo.

2. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}sen(1+\left(\frac{x}{n}\right))$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Grupo 5.

1. Sea $f_n(x) = \frac{sen\, nx}{n}$ $(0 \leq x \leq 1)$. Demuestre que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a 0 en $[0,1]$, pero que $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ no converge puntualmente a 0 en $[0,1]$.

2.Usando en teorema de Taylor deduzca la serie $cos\, x$ ó sea, muestre que

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\ (-\infty < x < \infty)$$

Análogamente deduzca que

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\ (-\infty < x < \infty)$$

Grupo 6.

1. Sea $f_n(x) = \frac{x}{n}e^{-\frac{x}{n}}$ $(0 \leq x < \infty)$
(a)¿Convergerá $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$uniformemente a 0 en $[0,\infty)$?
(b) ¿Convergerá $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformemente a 0 en $[0,500]$?

2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathbb{R}$ tal que $|S_n(x)| \leq M$ $(n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R})$ donde $S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales positivos la cual es convergente hacia cero. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Grupo 7.

1. Sea $g_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$ $(0 \leq x < \infty)$. Probar que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a 0 en $[0, \infty)$.
2. Demostrar que cada una de las siguientes series convergen uniformemente en el intervalo indicado:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ $(0 \leq x < \infty)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^n$ $(0 \leq x \leq 10)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^{\frac{3}{2}}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Taller No. 6

Grupo 1.

1. Si f es una función a valor real en $[a, a+h]$ tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo $x \in [a, a+h]$ y $f^{(n+1)}$ es continua en $[a, a+h]$, entonces

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Este resultado es conocido como "$fórmula\, de\, Taylor\, con\, resto\, integrable$".
Halle la fórmula de Taylor con resto integrable de $f(x) = sen\, x$ $(-\infty < x < \infty)$ y $a = 0$. Demuestre además que

$$\left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

2. La ecuación $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$ es conocida como la ecuación de Laguerre cuya solución es dada por $L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})$ para $0 \leq x < \infty$, estas funciones son llamadas los polinomios de Laguerre. Demostrar que los polinomios de Laguerre forman un conjunto ortogonal.

Grupo 2.

1. (a) Supóngase que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x de algún intervalo $(-R, R)$ y que $f(x) = 0$ para todo x de $(-R, R)$. Demostrar que cada $a_n = 0$.

(b) Supóngase que sólo sabemos que $f(x_n) = 0$ para alguna sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Demostrar de nuevo que cada $a_n = 0$

(c) Supóngase que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen para cada x en algún intervalo que contiene a 0 y que $f(x_n) = g(x_n)$ para alguna sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que

converge hacia 0. Demostrar que $a_n = b_n$ para todo n. En particular, “una función tiene una representación única como serie de potencias centradas en 0”.
2. Hallar las series de Fourier de las funciones siguientes que se suponen tienen período 2π.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ \pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}.$$

Grupo 3.

1. Demostrar que la serie binómica $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ presenta el siguiente comportamiento en los puntos $x = \pm 1$
(a) Si $x = -1$, la serie converge para $\alpha \geq 0$ y diverge para $\alpha < 0$.
(b) Si $x = 1$, la serie diverge para $\alpha \leq -1$, converge condicionalmente para $-1 < \alpha < 0$, y converge absolutamente en [0,1]
2.Dada la función $f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi$, hallar
a) El desarrollo senoidal
b) El desarrollo cosenoidal
c) La serie de Fourier completa en forma trigonométrica.

Grupo 4.

1. Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$.
$i)$ Demuestre que existe $f^{(n)}(0)$ para todo x.
$ii)$ Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge para todo x, pero no es igual a $f(x)$ si $x \neq 0$.
2. La ecuación $y'' - xy' + ny = 0$ es conocida como ecuación de Hermite y tiene por solución a las funciones $H_{n+1}(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$, llamadas polinomios de Hermite. Demostrar que los polinomios de Hermite forman un conjunto ortogonal en $-\infty \leq x \leq \infty$.

Grupo 5.

1. La sucesión de Fibonacci $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está definida por $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$
(a) Demostrar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$.
(b) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$. Utilizar el criterio del cociente para demostrar que $f(x)$ converge si $|x| < \frac{1}{2}$
(c) Demostrar que si $|x| < \frac{1}{2}$, entonces $f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1}$ ($Indicación$: Esta ecuación se puede escribir como $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$)

(d) Utilizar la descomposición en fracciones simples para $\frac{1}{x^2+x-1}$, y la serie de potencias de $\frac{1}{x-a}$ para obtener otra serie de potencias para f.
(e) Se sigue por un ejercicio anterior, que las dos series de potencias obtenidas para f deben ser idénticas. Utilizar este hecho para demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

2. La ecuación $(1-x^2)\ y'' - xy' + n^2 y = 0$ es llamada ecuación de Chebyshev cuya solución son los polinomios de Chebyshev $T_n(x) = cos[n\, arc\, cos\, x]$ para $-1 \leq x \leq 1$. Demostrar que los polinomios de Chebyshev forman un conjunto ortogonal.

Grupo 6.

1. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ converge para $|x| < 1$.
(a) Demostrar que $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ para $|x| < 1$
(b) Demostrar ahora que cualquier función f que satisfaga la parte (a) es de la forma $f(x) = c(1+x)^{\alpha}$ para cualquier constante c, y utilizar este hecho para establecer la serie binomial $(Indicación:\ Considérese\ g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}\,)$
2. Hallar las funciones propias y los valores propios del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$y'' + 3y' + (\lambda + 4)y = 0, \qquad y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0.$$

7.1. Evaluación final

1. a) Se considera una sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ creciente y una sucesión $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ decreciente y se supone que $u_n \leq v_n$ cualquiera que sea el número entero n. Mostrar que las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ son convergentes y que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Si además la sucesión $\{v_n - u_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene por límite a 0, las dos sucesiones tienen el mismo límite.

b) Aplicar el resultado de la parte a) a las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidas por u_0 y v_0 dados $(0 < u_0 < v_0)$ y por

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\,,\ \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

2. Muestre que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ converge uniformemente si $x \geq 0$ y diverge si $x < 0$.

Para valores positivos de x, se define una función f por $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$. Usando los teoremas de continuidad y derivabilibad para la convergencia uniforme demuestre que $f(x)$ es continua para $x \geq 0$ y derivable para $x > 0$.

3. Sean α un número real dado, t y x dos variables reales.
$a)$ Determine la serie de Fourier trigonométrica de la función f definida por

$$f(t) = cos\,\alpha t \quad \text{si} \quad -\pi < t < \pi.$$

$b)$Explique por qué la suma de la serie obtenida es igual a $f(t)$ si $-\pi < t < \pi$ y determine el valor de la suma para $t = \pi$.

$c)$ Deducir de la parte $b)$ que : $cotg\,x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$ ($Sugerencia$: Tome $x = \alpha t$ en la parte $b)$).

7.2. Solución de la evaluación

1.a) Las hipótesis entrañan que

$$u_0 \le u_n \le v_n \le v_0 \;\; (\forall n = 1, 2, 3, \dots)$$

La sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente acotada superiormente por v_0, por lo tanto v_0 es una cota superior del conjunto $\{u_0, u_1, u_3, \dots\}$; la sucesión $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente minorada por u_0, por lo tanto u_0 es una cota inferior del conjunto $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$. Recordando el teorema 5 del §1(No.1.7) (respectivamente el teorema 4 de la misma sección) tenemos que las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ son convergentes digamos a u y v respectivamente. Así existen $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ y $v = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Si n y m son dos enteros arbitrarios

$$u_n \le u_{n+m} \le v_{n+m} \le v_n.$$

Un minorante del conjunto $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ es inferior a $v(=inf\, v_n)$, por su parte v es un mayorante del conjunto $\{u_0, u_1, u_3, \dots, u_n, \dots\}$ y por lo tanto mayor a $u(=sup\, u_n)$. En consecuencia

$$u_n \le u \le v \le v_n \quad \Rightarrow 0 \le v - u \le u_n - v_n.$$

Si $v - u \ne 0$ y si $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$, por la definición de límite, es posible hallar un número N tal que $n > N \Rightarrow v_n - u_n < v - u$.

Esto es imposible por la hipótesis y entonces, por contradicción $v - u = 0$ si $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

b) Por recurrencia, se verifica comodamente que $u_n > 0$ y $v_n > 0$.

$$v_n^2 - u_n^2 = \left(\tfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}\right)^2 - u_{n-1}v_{n-1} = \left(\tfrac{v_{n-1}-u_{n-1}}{2}\right)^2 \ge 0.$$

Puesto que u_n y v_n son positivos, se puede escribir

$$v_n^2 - u_n^2 \ge 0 \Rightarrow v_n \ge u_n \text{ entonces } \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \ge u_n \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \le v_n \end{cases}$$

La sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente, la sucesión $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y además $u_n \le v_n$. Los resultados precedentes implican que:

$$u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$$

$$0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le v_{n+1} - u_n \underset{\uparrow \atop v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}}{=} \frac{v_n - u_n}{2}$$

De donde por recurrencia sobre n :

$$0 \le v_n - u_n \le \frac{v_0 - u_0}{2^n}$$

En efecto, $v_1 - u_1 \le \frac{v_0 - u_0}{2}$

$$v_2 - u_2 \le \frac{v_1 - u_1}{2} \le \frac{\frac{v_0 - u_0}{2}}{2} = \frac{v_0 - u_0}{2^2}$$

Suponiendo por hipótesis de inducción $v_n - u_n \leq \frac{v_0-u_0}{2^n}$, ahora

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n-u_n}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis de inducción}}}{\leq} \frac{\frac{v_0-u_0}{2^n}}{2} = \frac{v_0-u_0}{2^{n+1}}$$

Así la sucesión $v_n - u_n$ tiene por $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$. Todas las hipótesis de la parte a) se han verificado y las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergen hacia el mismo límite, o sea $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

2. Los términos de la serie son positivos

$$x \geq 0 \Rightarrow \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

Usando el criteio M de Wierstrass (ver teorema 2 §4.) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ converge uniformemente.

Si $x < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1} = +\infty$, así $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ es divergente.

Por lo tanto para $x \geq 0$, se ha visto que el término general de la serie es mayorado por $\frac{1}{n^2+1}$, término general de una serie convergente; este resultado entraña que la serie converge uniformemente en $[0, +\infty)$. Según el teorema 1 del §4. como $\{\frac{e^{-nx}}{n^2+1}\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1} = f(x)$ es continua, ya que la convergencia es uniforme.

La serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}$ tiene su término general $\frac{-ne^{-nx}}{n^2+1} < \frac{-n}{n^2+1}$ no convergente para $x = 0$, puesto que al comparar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tenemos $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = -1$.

Pero $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}$ converge para todo x positivo: La sucesión $ne^{-n} \to 0$ así $|ne^{-nx}| < 1$, luego $\left|\frac{ne^{-nx}}{n^{2+1}}\right| < \frac{1}{n^2+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente (compare con $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). Como $x \longrightarrow e^{-nx}$ es una función creciente de x, es evidente que

$$x \geq a > 0 \Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-na} \text{ entonces } \left|\frac{-ne^{-nx}}{n^{2+1}}\right| \leq \frac{ne^{-a}}{n^2+1}.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-a}}{n^2+1}$ es convergente; se sigue la convergencia uniforme de la serie derivada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}$ en el intervalo $[a, +\infty)$. Se dice entonces que la función $f(x)$ es derivable si $x \geq a$ y que $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}$.

Si $x_0 > 0$, se puede tomar un número a tal que $o < a < x_0$;. el resultado precedente es también valido y la función f es derivable para el valor x_0. La función f es así derivable en todo valor $x_0 > 0$.

3. (a) La función f es par, los coeficientes b_k son nulos para los coeficientes a_k se puede hacer las integrales en el intervalo $[0,\pi]$ y doblar el resultado obtenido

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos\alpha t\, dt = 2\frac{sen\alpha\pi}{\alpha\pi}$

$a_k = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} cos\alpha t\, coskt\, dt = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{cos\alpha t\cancel{s}enkt}{\cancel{k}}\Big|_0^{\pi} - \frac{\alpha sen\alpha t\, coskt}{k^2}\Big|_0^{\pi} + \alpha^2\int_0^{\pi}\frac{cos\alpha t\, coskt}{k^2}dt\Big)$

$$\frac{2}{\pi}(1-\frac{\alpha^2}{k^2})\int_0^{\pi} cos\alpha t\, coskt\, dt = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\alpha cosk\pi\, sen\alpha\pi}{k^2}\Big) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\pi}\Big(\frac{k^2-\alpha^2}{k^2}\Big)\int_0^{\pi} cos\alpha t\, cos\alpha t\, dt = -\frac{2}{\pi}\frac{\alpha(-1)^k sen\alpha\pi}{k^2}$$

así

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos\alpha t\, cos\alpha t\, dt = \frac{(-1)^k\alpha sen\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-k^2)}$$

Obteniéndose

$$f(t) = \frac{sen\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha sen\alpha\pi}{\alpha^2-k^2}\cdot cos\, kt \qquad (1)$$

b) En la teoría de series de Fourier, las funciones consideradas son supuestas periódicas; falta así prolongar la función f y tomar

$$f(-\pi) = f(\pi) = cos\,\alpha\pi,\ \ f(\pi+2\pi) = f(t)$$

La función f es entonces continua en $[-\pi,\pi]$ y derivable en este intervalo, es decir ella es derivable a derecha en $-\pi$ y derivable a izquerda en π. Se deduce que la función periódica f es continua y admite derivada a derecha y a izquierda en cualquier punto x del intervalo $[-\pi,\pi)$; pero ella no admite derivada para el valor π pues

$$f'(\pi-0) = -\alpha\, sen\alpha\pi,\ \ f'(\pi+0) = \alpha\, sen\alpha\pi.$$

Se dice entonces que la serie de **Fourier** converge hacia $f(t)$ para todo valor de t y por lo tanto hacia $cos\alpha t$ para todos los valores de t de $[-\pi,\pi]$, el valor π está comprendido y posee el valor $f(\pi) = cos\alpha\pi$

c) En particular, si $t=\pi$ en (1) se tiene:

$$cos\alpha\pi = sen\alpha\pi\Big[\frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2\alpha\, cosk\pi}{\pi(\alpha^2-k^2)}\Big]$$

$= sen\alpha\pi\Big[\frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha\pi}{\pi^2(\alpha^2-k^2)}\Big]$.Tomando $\alpha\pi = x$ se tiene

$$cotgx = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2\pi^2}$$

□

BIBLIOGRAFIA

[1] Apostol Tom M.: *Calculus. Volumen I*. Blaisdell Publishing Company. 1962

[2] Apostol Tom M.: *Análisis Matemático.* Editorial Reverte, S.A 1960

[3] Kaplan Wilfred : *Matemáticas avanzadas* .Addison-Wesley Iberoamericana. 1986

[4] Kreyszig Erwin: *Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Volumen 1.* Limusa. 1979

[5] Kuntzmann Jean: *Séries.* Hermann Collection. Paris 1967.

[6] Lefort G.: *Algébre et Analyse. Exercices.* Dunod . Paris 1961

[7] Muñoz Quevedo José M.: *Introducción a la teoría de conjuntos.* U . Nal. 1979.

[8] Sánchez H. J. D.:*Teoría general de Ecuaciones Diferenciales lineales.* C.D. 1985.

[9] Sánchez H. J.D.: *Elementos de operadores autoadjuntos de segundo orden*.C.D

Bogotá 1995.

[10] Sánchez H. J.D.: *Matemáticas V.* U.Nal 1998.

[11] Spivak Michael : *Calculus . Volumen II.* Editorial Reverte S.A. 1978.

[12] Takeuchi Yu : *Sucesiones y series. Tomos 1 y 2.* U. Nal. 1971.

Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a: danojuanos@hotmail.com